Оглавление

[Введение 2](#_Toc200010155)

[1. Разработка методов дискретного логарифмирования 6](#_Toc200010156)

[2. Вспомогательные математические функции 8](#_Toc200010157)

[3. Алгоритм Шенкса 12](#_Toc200010158)

[4. Алгоритм Полига-Хеллмана 19](#_Toc200010159)

[5. Алгоритм ро-метод Полларда 26](#_Toc200010160)

[6. Алгоритм Адлемана 36](#_Toc200010161)

[7. Алгоритм COS 43](#_Toc200010162)

[8. Алгоритм решето числового поля 50](#_Toc200010163)

[Заключение 62](#_Toc200010164)

[Список литературы 66](#_Toc200010165)

[Приложения 67](#_Toc200010166)

[Приложение 1. Модифицированный алгоритм Шенкса 67](#_Toc200010167)

[Приложение 2. Модифицированный алгоритм Полига-Хеллмана 70](#_Toc200010168)

[Приложение 3. Модифицированный алгоритм ро-метод Полларда 74](#_Toc200010169)

[Приложение 4. Модифицированный алгоритм Адлемана 75](#_Toc200010170)

[Приложение 5. Модифицированный алгоритм COS 86](#_Toc200010171)

[Приложение 6. Модифицированный алгоритм решето числового поля 98](#_Toc200010172)

# Введение

Дискретное логарифмирование является задачей обращения функции в некоторой конечной мультипликативной группе .

Задача дискретного логарифмирования наиболее часто рассматривается над конечным полем в группе точек эллиптической кривой и в мультипликативной группе конечного поля или кольца вычетов. На данный момент не существует эффективных алгоритмов для решения задач дискретного логарифмирования.

Дискретным логарифмом элемента по основанию называется решение уравнения . Индекс числа по основанию называется решением, когда является мультипликативной группой кольца вычетов по модулю . Если является первообразным корнем по модулю , то обязательно существует индекс числа по основанию .

Пусть в некоторой конечной мультипликативной абелевой группе задано уравнение . Нахождение некоторого неотрицательного числа , удовлетворяющего данному уравнению, является решением задачи дискретного логарифмирования. Если существует решение, то у уравнения должно быть хотя бы одно натуральное решение, не превышающее порядок группы. Таким образом данное условие даёт жесткую оценку сложности алгоритма поиска решений сверху. Решение перебором нашло бы результат за число шагов не выше порядка данной группы.

Наиболее рассматриваемым случаем является , когда группа является циклической, порождённой элементом . В данном случае уравнение всегда имеет решение. Существование решения задачи дискретного логарифмирования, а именно уравнения , требует отдельного рассмотрения, если группа произвольная.

Для примера дана задача дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа . Будет проведено решение задачи методом перебора. Вычисляя все степени числа 3 по модулю 17, получаются следующие значения: . Решением данного уравнения является , так как . В прикладных задачах модуль берётся большим числом, поэтому метод перебора является неэффективным и достаточно медленным, таким образом возникает потребность в более эффективных и быстрых алгоритмах.

Существует множество алгоритмов, которые разделяются на экспоненциальные и субэкспоненциальные алгоритмы, для решения задачи дискретного логарифмирования. На данный момент полиномиального алгоритма для решения данной задачи не существует.

Алгоритмы с экспоненциальной сложностью:

1) алгоритм Шенкса (алгоритм больших и малых шагов);

2) алгоритм Полига - Хеллмана работает, когда имеется разложение числа . на простые множители. Сложность: . Алгоритм очень эффективен, когда множители, на которые раскладывается достаточно маленькие;

3) ро-Метод Полларда имеет эвристическую оценку сложности .

Алгоритмы с субэкспоненциальной сложностью:

В L-нотации вычислительная сложность данных алгоритмов оценивается как арифметических операций, где и - некоторые константы. От близости величин и к 1 и 0 зависит эффективность алгоритма.

1) алгоритм Алемана, появившийся в 1979 году, был первым субэкспоненциальным алгоритмом дискретного логарифмирования и на практике был недостаточно эффективным. В данном алгоритме .

2) алгоритм COS был изобретён математиками Копперсмитом, Одлыжко и Шреппелем в 1986 году. В данном алгоритме . Данным алгоритмом было проведено логарифмирование по модулю в 1991 году. В 1997 году Вебер при использовании модифицированной версии алгоритма смог провести дискретное логарифмирование по модулю . Эксперименты показали, что алгоритм COS продемонстрировал лучше результаты, чем решето числового поля при .

3) дискретное логарифмирование с использованием решета числового поля было применено к дискретному логарифмированию позже, чем к факторизации чисел. Первые идеи появились в 1990-х годах. Модификация алгоритма Д. Гордона, предложенная в 1993 году, имела эвристическую сложность , но оказалась достаточно непрактичной. Позднее появились множество других улучшений данного алгоритма. Экспериментально было показано, что при решето числового поля быстрее, чем алгоритм COS. Данным алгоритмом получены современные рекорды дискретного логарифмирования.

Параметры являются наилучшими в оценке сложности на данный момент.

Есть возможность улучшить результат для чисел специального вида. Можно построить алгоритм, для которого константы будут . Данные алгоритмы могут обогнать алгоритм с , потому что константа достаточно близка к 1.

Актуальность выпускной работы заключается в том, что задача дискретного логарифмирования является одной из основных задач, на которых базируется криптография с открытым ключом. Классическими криптографическими схемами на её основе являются схема выработки общего ключа Диффи-Хеллмана, схема электронной подписи Эль-Гамаля, криптосистема Мэсси-Омуры для передачи сообщений. За счёт высокой вычислительной сложности обращения показательной функции проявляется их криптостойкость. Хотя сама показательная функция вычисляется достаточно эффективно, даже самые современные алгоритмы вычисления дискретного логарифма имеют очень высокую сложность, которая сравнима со сложностью наиболее быстрых алгоритмов разложения чисел на множители.

Другая возможность эффективного решения задачи вычисления дискретного логарифма связана с квантовыми вычислениями. Теоретически доказано, что с помощью алгоритма Шора дискретный логарифм можно вычислить за полиномиальное время. В любом случае, если полиномиальный алгоритм вычисления дискретного логарифма будет реализован, это будет означать практическую непригодность криптосистем на его основе для долговременной защиты данных. Рассматривается ряд идей для создания новых алгоритмов с открытым ключом.

Целью выпускной работы является исследование и разработка алгоритмов дискретного логарифмирования с экспоненциальной и субэкспоненциальной сложностью. Также исследование и разработка модифицированных алгоритмов на основе разработанных базовых алгоритмов дискретного логарифмирования, проведение экспериментов и сравнение базовых и модифицированных алгоритмов.

Задачами выпускной работы являются:

1) реализовать вспомогательные математические функции для проверки алгоритмов дискретного логарифмирования,

2) исследовать и реализовать базовые алгоритмы дискретного логарифмирования,

3) исследовать и реализовать модифицированные алгоритмы дискретного логарифмирования,

4) провести эксперименты и сравнительный анализ на реализованных базовых и модифицированных методах дискретного логарифмирования.

# 1. Разработка методов дискретного логарифмирования

В процессе выпускной работы были изучены и реализованы базовые и модифицированные методы дискретного логарифмирования на языке программирования C# на .NET8 в Windows Forms (рисунок 1). Для тестирования данных алгоритмов был реализован генератор параметров Диффи-Хеллмана и возведение числа в степень по модулю [1]. Также для тестирования данных алгоритмов был использован замер времени выполнения алгоритма и количество затраченной памяти на выполнение алгоритма.



Рисунок 1 - Реализованная программа

Были реализованы экспоненциальные алгоритмы дискретного логарифмирования: алгоритм Шенкса [2], алгоритм Полига-Хеллмана [3], ро-метод Полларда [4], а также субэкспоненциальные алгоритмы дискретного логарифмирования: алгоритм Адлемана [5], алгоритм COS [6], решето числового поля [7]. Для разработки всех алгоритмов были реализованы вспомогательные математические функции.

Разработанная программа позволяет вносить в текстовые поля необходимые значения параметров возведения чисел в степень по модулю: g, a, p, A, либо целых чисел N для разложения на простые множители и выводить результат вычисления. Для корректности работы программы была реализована проверка на корректность ввода параметров для вычисления результатов алгоритмов. При помощи встроенного метода TryParse() в платформе для разработки программного обеспечения .NET идёт попытка конвертировать введённые значения в BigInteger. Если конвертация проходит успешно, то идёт проверка отрицательность конвертированных значений. Если проверка введённых значений проходит успешно, то идёт вычисление алгоритма (рисунок 2).



Рисунок 2 - Вычисление модифицированных алгоритмов

# 2. Вспомогательные математические функции

Для реализации алгоритмов дискретного логарифмирования были реализованы вспомогательные математические функции.

Была реализована функция быстрого возведения в степень по модулю. Возведение в степень по модулю является операцией над натуральными числами, которые выполняются по модулю. Данная операция применяется в информатике, в частности в криптографии с открытым ключом.

Возведение в степень по модулю – это вычисление остатка от деления натурального числа (основание), возведённого в степень (показатель степени), на натуральное число (модуль), обозначаемое .

Если выполняется условие, что , и неотрицательны и , тогда существует единственное решение , причём . В случае, если показатель степени отрицательное, то возведение в степень по модулю также может быть выполнено. В таком случае требуется найти число , обратное числу по модулю , что выполняется при использовании алгоритма Евклида. От сюда следует, что .

При больших входных значениях возведение в степень по модулю достаточно эффективно, но более трудозатратным является вычисление дискретного логарифма, то есть нахождение показателя степени при входных параметрах , и . Данное одностороннее поведение функции даёт возможность применять функцию в криптографических алгоритмах.

Шаги алгоритма быстрого возведения в степень по модулю:

1) показатель степени переводится в двоичный вид;

2) создаётся список для чисел, первый элементом которого является ;

3) в созданный список циклично добавляются остатки от деления квадратов последних элементов на ;

4) все элементы списка, индексы которых совпадают с позициями 1 в двоичном числе из первого пункта, перемножаются;

5) вычисляется остаток от деления перемноженных чисел списка на .

Для проверки работы разработанного алгоритма были сгенерированы параметры Диффи-Хеллмана: . В результате работы алгоритма был корректно вычислен результат (рисунок 3).

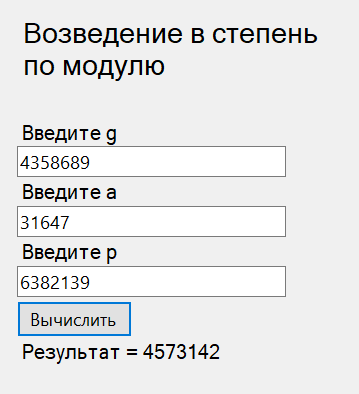


Рисунок 3 - Результат возведения в степень по модулю

Для проверки чисел на простоту был реализован тест Миллера-Рабина [8]. Данный тест является вероятностным полиномиальным тестом простоты. Данный тест применяется для того, чтобы эффективно определить, является ли входное число составным. Для решения данной проблемы применяются в том числе тест Ферма [9] и тест Соловея-Штрассена [10]. Недостатком теста Миллера-Рабина является невозможность строгого доказательства простоты числа. Однако данный тест широко применяется в области криптографии для вычисления больших случайных простых чисел.

Для создания секретных ключей, на которых основывается криптостойкость многих алгоритмов шифрования, необходимы простые числа. По данной причине для генерации ключей необходимо иметь возможность проверять большие числа на простоту достаточно быстро. Вероятностные тесты демонстрируют большую простоту выражения и эффективность использования по сравнению с детерминированными тестами, например, тест Миллера-Рабина и тест Соловея-Штрассена. Тест Миллера-Рабина даёт достаточно малую вероятность того, что число является составным при проверке за малое время.

Тест Миллера-Рабина основывается на проверке ряда равенств, выполняемой для простых чисел. При условии, что хотя бы одно равенство не выполняется, тест докажет, что число составное.

Для теста Миллера-Рабина применяется следующее утверждение. Пусть – простое число и , где – нечётно. Тогда для любого из выполняется хотя бы одно из условий:

1) ;

2) существует целое число такое, что .

Если одно из данных условий выполняется для некоторых чисел и (не обязательно простого), то число называют вероятно простым, а число – свидетелем простоты числа по Миллеру. Вероятность ошибочно принять составное число за простое составляет 25% при случайно выбранном , однако выполнив проверки для других вероятность ошибки можно уменьшить.

При условии, что выполняется контрапозиция доказанного утверждения, то есть если найдётся число такое, что:

1) ,

2) ,

тогда число не является простым, а число называется свидетелем того, что число является составным.

Согласно теореме Рабина, нечётные составные числа имеют не более свидетелей простоты, где — функция Эйлера, то есть вероятность того, что случайно выбранное число окажется свидетелем простоты, меньше 0,25. Суть теста состоит в том, чтобы проверить являются ли случайно выбранные числа свидетелями простоты числа , при условии, что . Число в результате является составным, если имеется свидетель того, что число составное. Таким образом, число считается простым, если было проверено чисел, все из которых оказались свидетелями простоты. Вероятность принятия составного числа за простое является меньше для данного алгоритма.

По причине того, что распределение свидетелей простоты и составного числа среди чисел заранее неизвестно, необходимо выбирать числа случайными для проверки больших чисел.

Для алгоритма Миллера-Рабина, параметризуемого количеством раундов , рекомендуется брать порядка величины , где - проверяемое число.

Для данного вычисляется такое целое число и целое нечётное число , что выполняется . Генерируется случайное число такое, что . В случае, если число не является свидетелем простоты числа , генерируется ответ, что « — составное», далее алгоритм завершается. Иначе, генерируется новое случайное число и проверка повторяется. После вычисления свидетелей простоты, имеется результат, что « — вероятно простое», после чего алгоритм завершается.

# 3. Алгоритм Шенкса

Были реализованы алгоритмы и проведены тесты базового и модифицированного алгоритма «Шаг младенца – шаг великана». Алгоритм Гельфонда-Шенкса - в теории групп детерминированный алгоритм дискретного логарифмирования в мультипликативной группе кольца вычетов по модулю простого числа. Данный алгоритм также называется алгоритмом согласования и алгоритмом больших и малых шагов. Начальный вид алгоритма был разработан советским математиком Александром Гельфондом в 1962 году и Дэниелом Шенксом в 1972 году. Данный алгоритм в теории упрощает решение задач дискретного логарифмирования, на вычислительной сложности которого построены многие криптосистемы с открытым ключом, и относится к методам встречи посередине.

Данный метод был одним из первых алгоритмов, продемонстрировавших, что вычисление дискретного логарифма может выполняться быстрее, чем методом перебора. Суть метода заключается в усовершенствованном поиске показателя степени, то есть выбирается оптимальное соотношение времени и памяти.

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Начальный алгоритм реализован следующим образом:

1) сначала берутся два целых числа и , такие, что . Как правило ;

2) вычисляются два ряда чисел:

,

.

Все вычисления проводятся по модулю ;

3) идёт поиск таких и , для которых выполняется равенство . То есть ищется во втором ряду такое число, которое присутствует и в первом ряду. Запоминаются показатели степени и , при которых данные числа получались;

4) в результате работы алгоритма неизвестная степень вычисляется по формуле .

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в распараллеливании 2 и 3 шага алгоритма. На 2 шаге алгоритма параллельно вычисляются два ряда чисел. На 3 шаге был сделан параллельный поиск результата с начала и с конца ряда.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 1) и модифицированного (таблица 2) алгоритма Шенкса, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 1- Результаты тестов базового алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 9347 | 99 | 14629 | 6331 | 4 | 278312 |
| 11873 | 107 | 14401 | 2419 | 1 | 270368 |
| 11922 | 78 | 26399 | 22034 | 1 | 417888 |
| 606 | 75 | 4973 | 3597 | 2 | 139664 |
| 8173 | 49 | 14143 | 8610 | 1 | 263168 |
| 32464 | 14 | 32717 | 20677 | 1 | 263168 |
| 6229 | 118 | 32257 | 5301 | 2 | 444096 |
| 7921 | 106 | 16703 | 100 | 2 | 296064 |
| 16108 | 101 | 31271 | 6732 | 7 | 5862760 |
| 5901 | 85 | 7019 | 3639 | 2 | 164480 |

Таблица 2 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 9347 | 99 | 14629 | 6331 | 47 | 278592 |
| 11873 | 107 | 14401 | 2419 | 27 | 270368 |
| 11922 | 78 | 26399 | 22034 | 23 | 409408 |
| 606 | 75 | 4973 | 3597 | 24 | 139808 |
| 8173 | 49 | 14143 | 8610 | 23 | 271392 |
| 32464 | 14 | 32717 | 20677 | 35 | 466992 |
| 6229 | 118 | 32257 | 5301 | 34 | 452320 |
| 7921 | 106 | 16703 | 100 | 21 | 296064 |
| 16108 | 101 | 31271 | 6732 | 30 | 452320 |
| 5901 | 85 | 7019 | 3639 | 32 | 172704 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Шенкса равно 2.3 мс, а модифицированного алгоритма Шенкса равно 29.6 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Шенкса равна 839996.8 байт, а модифицированного алгоритма Шенкса равна 320996.8 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения, а модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 3) и модифицированного (таблица 4) алгоритма Шенкса, где , и – 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 3- Результаты тестов базового алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 72142839 | 45 | 401699497 | 180776367 | 179450 | 4586080 |
| 216592957 | 67 | 1535278343 | 983613871 | 1416246 | 8018992 |
| 1063850105 | 28 | 1752424721 | 1133518573 | 2049247 | 10349832 |
| 641832856 | 114 | 1912453999 | 1707478458 | 1334235 | 9234184 |
| 153341898 | 17 | 378285451 | 184658749 | 356234 | 6531234 |
| 440270945 | 86 | 547132867 | 127053943 | 1734623 | 7652345 |
| 28181579 | 96 | 1691891543 | 1482106649 | 2195341 | 6534923 |
| 572050022 | 37 | 1405842083 | 45578011 | 1827374 | 8634152 |
| 1769314487 | 117 | 1978813019 | 1603737570 | 1475357 | 5734645 |
| 608493163 | 53 | 667849967 | 614352815 | 2341533 | 10294564 |

Таблица 4 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 72142839 | 45 | 401699497 | 180776367 | 175768 | 1709904 |
| 216592957 | 67 | 1535278343 | 983613871 | 1387387 | 7734960 |
| 1063850105 | 28 | 1752424721 | 1133518573 | 2046500 | 4854392 |
| 641832856 | 114 | 1912453999 | 1707478458 | 1134235 | 9134184 |
| 153341898 | 17 | 378285451 | 184658749 | 336234 | 6231234 |
| 440270945 | 86 | 547132867 | 127053943 | 1434623 | 7152345 |
| 28181579 | 96 | 1691891543 | 1482106649 | 2095341 | 6134923 |
| 572050022 | 37 | 1405842083 | 45578011 | 1427374 | 8234152 |
| 1769314487 | 117 | 1978813019 | 1603737570 | 1275357 | 5234645 |
| 608493163 | 53 | 667849967 | 614352815 | 2141533 | 10094564 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Шенкса равно 1490964 мс, а модифицированного алгоритма Шенкса равно 1345435.2 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Шенкса равна 7757095.1 байт, а модифицированного алгоритма Шенкса равна 6651530.3 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 5) и модифицированного (таблица 6) алгоритма Шенкса, где , и – 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 5- Результаты тестов базового алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 734022286 | 2260 | 888333059 | 207727322 | 851317 | 2438016 |
| 519908789 | 27422 | 1176863351 | 1004437759 | 1032538 | 5691992 |
| 1190622764 | 23591 | 1582719121 | 421276480 | 1775280 | 7058624 |
| 43944272 | 7622 | 113830279 | 97331062 | 1204953 | 4562345 |
| 11153680 | 31859 | 1827918509 | 1658501642 | 1352342 | 4567234 |
| 167298629 | 19434 | 289159777 | 20563900 | 1652352 | 5237524 |
| 83421829 | 2311 | 1620676819 | 1044052987 | 1586493 | 6956284 |
| 1506890940 | 15782 | 1556831663 | 467681122 | 1826592 | 5927483 |
| 463547350 | 2937 | 1648004693 | 633238154 | 1284859 | 6375812 |
| 56985777 | 14752 | 60477983 | 13103552 | 1683934 | 6839491 |

Таблица 6 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Шенкса

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 734022286 | 2260 | 888333059 | 207727322 | 848845 | 3354080 |
| 519908789 | 27422 | 1176863351 | 1004437759 | 1035389 | 211480 |
| 1190622764 | 23591 | 1582719121 | 421276480 | 1742844 | 983696 |
| 43944272 | 7622 | 113830279 | 97331062 | 1104953 | 4262345 |
| 11153680 | 31859 | 1827918509 | 1658501642 | 1152342 | 4267234 |
| 167298629 | 19434 | 289159777 | 20563900 | 1252352 | 5037524 |
| 83421829 | 2311 | 1620676819 | 1044052987 | 1286493 | 6556284 |
| 1506890940 | 15782 | 1556831663 | 467681122 | 1526592 | 5527483 |
| 463547350 | 2937 | 1648004693 | 633238154 | 1084859 | 6075812 |
| 56985777 | 14752 | 60477983 | 13103552 | 1483934 | 6439491 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Шенкса равно 1425066 мс, а модифицированного алгоритма Шенкса равно 1251860.3 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Шенкса равна 5565480.5 байт, а модифицированного алгоритма Шенкса равна 4271542.9 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и затраченной памяти.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма Шенкса можно сделать вывод, что базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченном времени выполнения на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Шенкса. Также базовый и модифицированный алгоритм Шенкса показал лучше результаты, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число (рисунок 4, 5).

Рисунок 4 - Среднее затраченное время алгоритма Шенкса

Рисунок 5 - Средняя затраченная память алгоритма Шенкса

# 4. Алгоритм Полига-Хеллмана

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана. Данный алгоритм представляет собой детерминированный алгоритм дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа.

Особенностью данного метода является возможность вычислять дискретный логарифм за полиномиальное время. Алгоритм был разработан Рональдом Сильвером, а впервые упомянут американскими математиками Стивеном Полигом и Мартином Хеллманом в 1978 году в статье статье «An improved algorithm for computing logarithms over GF(p) and its cryptographic significance».

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Шаги выполнения алгоритма:

1) идёт разложение числа на простые множители;

2) составляется таблица значений ,

где ;

3) вычисляется .

Для от 1 до :

Пусть ,

где .

Тогда верно сравнение:

.

С помощью таблицы, составленной на шаге 1, находится .

Для от 0 до рассматривается сравнение

.

Решение находится по таблице

Конец цикла по .

Конец цикла по ;

4) найдя для всех , происходит поиск

по китайской теореме об остатках.

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 1 шаге алгоритма число было разложено на простые множители и данные простые множители были возведены в свои степени, чтобы на 2 шаге была составлена таблица из единичных значений без степеней.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 7) и модифицированного (таблица 8) алгоритма Полига-Хеллмана, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 7 - Результаты тестов базового алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 24988 | 115 | 26321 | 20051 | 4 | 122848 |
| 28078 | 92 | 29927 | 13442 | 3 | 2096960 |
| 9617 | 76 | 11161 | 5273 | 1 | 115136 |
| 1477 | 11 | 2237 | 1434 | 1 | 90464 |
| 5303 | 90 | 6911 | 98 | 3 | 1102016 |
| 5066 | 116 | 22129 | 10520 | 1 | 797744 |
| 529 | 46 | 6359 | 5657 | 1 | 57568 |
| 1200 | 20 | 20287 | 17854 | 1 | 98688 |
| 3165 | 104 | 3469 | 1723 | 1 | 49344 |
| 18155 | 55 | 26561 | 14043 | 1 | 172704 |

Таблица 8 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 24988 | 115 | 26321 | 20051 | 2 | 147472 |
| 28078 | 92 | 29927 | 13442 | 7 | 3591032 |
| 9617 | 76 | 11161 | 5273 | 1 | 106912 |
| 1477 | 11 | 2237 | 1434 | 1 | 98688 |
| 5303 | 90 | 6911 | 98 | 4 | 1095376 |
| 5066 | 116 | 22129 | 10520 | 3 | 5486168 |
| 529 | 46 | 6359 | 5657 | 1 | 482800 |
| 1200 | 20 | 20287 | 17854 | 1 | 164480 |
| 3165 | 104 | 3469 | 1723 | 1 | 427664 |
| 18155 | 55 | 26561 | 14043 | 1 | 271395 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Полига-Хеллмана равно 1.7 мс, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равно 2.2 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Полига-Хеллмана равна 470347.2 байт, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равна 1187198.7 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и в затраченной памяти, а модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 9) и модифицированного (таблица 10) алгоритма Полига-Хеллмана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 9 - Результаты тестов базового алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 826490941 | 79 | 1275360979 | 886381049 | 63 | 692936 |
| 907235208 | 40 | 1472976761 | 1403813502 | 2330 | 20149296 |
| 150735016 | 118 | 232048709 | 183560230 | 12332 | 48988592 |
| 398609238 | 44 | 463302293 | 181170371 | 25510 | 64909360 |
| 709577596 | 8 | 738854551 | 429342132 | 11 | 2244176 |
| 459714223 | 104 | 1575821713 | 1309948980 | 64 | 129485832 |
| 48998814 | 115 | 68156359 | 30922260 | 37754 | 269647128 |
| 163526763 | 65 | 169925429 | 161038104 | 2633 | 17422024 |
| 213970339 | 108 | 1504288153 | 1423746419 | 38 | 3617528 |
| 827348200 | 108 | 984019013 | 841880618 | 4962 | 16211672 |

Таблица 10 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 826490941 | 79 | 1275360979 | 886381049 | 36 | 1282536 |
| 907235208 | 40 | 1472976761 | 1403813502 | 2300 | 2814088 |
| 150735016 | 118 | 232048709 | 183560230 | 11841 | 4588272 |
| 398609238 | 44 | 463302293 | 181170371 | 24906 | 1975104 |
| 709577596 | 8 | 738854551 | 429342132 | 16 | 3686576 |
| 459714223 | 104 | 1575821713 | 1309948980 | 59 | 1429024 |
| 48998814 | 115 | 68156359 | 30922260 | 37569 | 234488 |
| 163526763 | 65 | 169925429 | 161038104 | 2506 | 40232 |
| 213970339 | 108 | 1504288153 | 1423746419 | 24 | 2334904 |
| 827348200 | 108 | 984019013 | 841880618 | 5074 | 175760 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Полига-Хеллмана равно 8569.7 мс, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равно 8433.1 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Полига-Хеллмана равна 57336854.4 байт, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равна 1856098.4 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости выполнения и в затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 11) и модифицированного (таблица 12) алгоритма Полига-Хеллмана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 11 - Результаты тестов базового алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 306074639 | 9831 | 550557677 | 375053531 | 58 | 921864 |
| 857398933 | 27336 | 1644352211 | 506827146 | 644 | 2747936 |
| 873747693 | 19609 | 2052455927 | 1442979517 | 20718 | 130853712 |
| 932095871 | 15435 | 1343978191 | 431999182 | 19682 | 2450760 |
| 1414779283 | 29584 | 1705294571 | 1255511029 | 111 | 3749152 |
| 406221477 | 24407 | 1048450831 | 883157096 | 19541 | 4059032 |
| 19992566 | 3706 | 21380063 | 6707478 | 3024 | 32183720 |
| 40746430 | 30170 | 507416659 | 424602148 | 6975 | 14569512 |
| 1715375241 | 16283 | 1980316259 | 1065914095 | 157 | 5296416 |
| 83622979 | 15419 | 750177383 | 692438560 | 3213 | 33511504 |

Таблица 12 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 306074639 | 9831 | 550557677 | 375053531 | 56 | 4793016 |
| 857398933 | 27336 | 1644352211 | 506827146 | 627 | 957584 |
| 873747693 | 19609 | 2052455927 | 1442979517 | 20639 | 411744 |
| 932095871 | 15435 | 1343978191 | 431999182 | 19672 | 2059240 |
| 1414779283 | 29584 | 1705294571 | 1255511029 | 104 | 2257800 |
| 406221477 | 24407 | 1048450831 | 883157096 | 19492 | 4213960 |
| 19992566 | 3706 | 21380063 | 6707478 | 3109 | 152175104 |
| 40746430 | 30170 | 507416659 | 424602148 | 6449 | 1567296 |
| 1715375241 | 16283 | 1980316259 | 1065914095 | 168 | 666952 |
| 83622979 | 15419 | 750177383 | 692438560 | 3414 | 54042272 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Полига-Хеллмана равно 7412.3 мс, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равно 7373 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Полига-Хеллмана равна 23034360.8 байт, а модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана равна 22314496.8 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и в затраченной памяти.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма Полига-Хеллмана можно сделать вывод, что базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченном времени выполнения и затраченной памяти на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Полига-Хеллмана. Также базовый и модифицированный алгоритм Поллига-Хеллмана показал лучше результаты в затраченном времени выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число. Модифицированный алгоритм показал сильно лучше результаты в затраченной памяти, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число (рисунок 6, 7).

Рисунок 6 - Среднее затраченное время алгоритма Полига-Хеллмана

Рисунок 7 - Средняя затраченная память алгоритма Полига-Хеллмана

# 5. Алгоритм ро-метод Полларда

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма дискретного логарифмирования ро-метод Полларда для факторизации (разложения на множители) целых чисел. Данный метод базируется на алгоритме Флойда поиска длины цикла в последовательности и некоторых следствиях из парадокса дней рождения. Наибольшую эффективность данный метод показывает при факторизации составных чисел с достаточно малыми множителями в разложении. Ро-метод Полларда строит числовую последовательность, элементы которой образуют цикл, начиная с некоторого номера , что может быть проиллюстрировано, расположением чисел в виде греческой буквы ρ, что послужило названием семейству алгоритмов.

Шаги выполнения алгоритма:

1) генерируется случайно число между и ;

2) инициализируются числа , , ;

3) в цикле вычисляется до тех пор, пока не будет равен 1;

4) если равен , то присваивается и присваивается . Далее и ;

5) после завершения цикла на 3 шаге возвращается результат, равный .

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 4 шаге алгоритма увеличилась степень вычисляемого . При вычислении степень полинома увеличилась до 3.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 13) и модифицированного (таблица 14) алгоритма ро-метод Полларада, где - 64 битное число.

Таблица 13 - Результаты тестов базового алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 5 | 1002 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 2 | 8224 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 1 | 1000 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 1 | 8224 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 1 | 1042 |
| 8882060243859981047 | 17 | 522474131991763591 | 2 | 1021 |
| 3401883967797524099 | 209 | 16276956783720211 | 1 | 1092 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 1 | 1021 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 2 | 49048 |
| 3047154990597365849 | 401 | 7598890250866249 | 1 | 8224 |

Таблица 14 - Результаты тестов модифицированного алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 1 | 8224 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 1 | 24416 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 2 | 1000 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 1 | 8224 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 2 | 1042 |
| 8882060243859981047 | 127 | 69937482235117961 | 1 | 1021 |
| 3401883967797524099 | 19 | 179046524620922321 | 1 | 1092 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 1 | 1021 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 2 | 712672 |
| 3047154990597365849 | 9619 | 316785007859171 | 1 | 40864 |

В результате тестов, где - 64 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма ро-метод Полларда равно 1.7 мс, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равно 1.3 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма ро-метод Полларда равна 7989.8 байт, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равна 79957.6 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, а модифицированный алгоритм лучше результаты в скорости.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 15) и модифицированного (таблица 16) алгоритма ро-метод Полларада, где - 128 битное число.

Таблица 15 - Результаты тестов базового алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 1 | 8224 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 4 | 622464 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 1 | 49088 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 1 | 8224 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 1 | 8224 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 2 | 230272 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 2 | 41120 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 5 | 616800 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 1 | 8224 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 1 | 8224 |

Таблица 16 - Результаты тестов модифицированного алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 4 | 278336 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 5 | 917368 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 1 | 139296 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 1 | 32640 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 1 | 8168 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 8 | 2702520 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 1 | 57568 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 7 | 1046152 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 1 | 16448 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 2 | 57568 |

В результате тестов, где - 128 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма ро-метод Полларда равно 1.9 мс, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равно 3.1 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма ро-метод Полларда равна 160086.4 байт, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равна 577610.67 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 17) и модифицированного (таблица 18) алгоритма ро-метод Полларада, где - 256 битное число.

Таблица 17 - Результаты тестов базового алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 18 | 20280 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 1 | 8224 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 1 | 8224 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 1 | 1 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 1 | 1 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 1 | 8224 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 6 | 3027 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 1 | 8176 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 1 | 8224 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 1 | 8224 |

Таблица 18 - Результаты тестов модифицированного алгоритма ро-метод Полларда

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 7 | 769984 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 1 | 8224 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 1 | 7968 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 1 | 8224 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 1 | 1 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 2 | 344128 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 2 | 344128 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 1 | 8224 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 1 | 16448 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 1 | 16448 |

В результате тестов, где - 256 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма ро-метод Полларда равно 3.2 мс, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равно 1.8 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма ро-метод Полларда равна 7260.5 байт, а модифицированного алгоритма ро-метод Полларда равна 152377.7 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, а модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма ро-метод Полларда можно сделать вывод, что базовый алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже результаты в затраченном времени выполнения, где – 64 бит и – 256 бит (рисунок 8, 9).

Рисунок 8 - Среднее затраченное время алгоритма ро-метод Полларда

Рисунок 9 - Средняя затраченная память алгоритма ро-метод Полларда

# 6. Алгоритм Адлемана

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма Адлемана. Данным алгоритм является первым субэкспоненциальным алгоритмом дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа.

Алгоритм был разработан в 1979 году американским учёным-теоретиком в области компьютерных наук, профессором компьютерных наук и молекулярной биологии в Университете Южной Калифорнии Леонардом Максом Адлеманом. Учёный также знаменит как соавтор системы шифрования RSA и ДНК-вычислений. RSA широко применяется в приложениях компьютерной безопасности, в том числе в протоколе HTTPS.

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Описание алгоритма:

1) сформировывается факторная база, состоящая из всех простых чисел :

;

2) с помощью перебора идёт поиск натуральных чисел таких, что

,

то есть раскладывается по факторной базе. Отсюда следует, что ;

3) набрав достаточно много соотношений из 2 шага, решается получившаяся система линейных уравнений относительно неизвестных дискретных логарифмов элементов факторной базы ;

4) с помощью некоторого перебора ищется одно значение , для которого , где – простые числа «средней» величины, то есть , где – также некоторая субэкспоненциальная граница, ;

5) с помощью вычислений, аналогичных этапам 2 и 3 ищутся дискретные логарифмы ;

6) определяется искомый дискретный логарифм:

.

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 1 шаге алгоритма был изменён показатель степени при вычислении числа, тем самым понизив факторную базу.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 19) и модифицированного (таблица 20) алгоритма Адлемана, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 19 - Результаты тестов базового алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 1805 | 3355432 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 919 | 1893984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 151 | 780608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 237 | 585632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 390 | 3022056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 569 | 1990576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 663 | 1134792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 332 | 2914776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 371 | 531968 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 792 | 883392 |

Таблица 20 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 234 | 4321 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 245 | 3984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 151 | 80608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 237 | 85632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 390 | 22056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 569 | 90576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 633 | 34792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 332 | 914776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 715 | 531968 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 792 | 83392 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Адлемана равно 622.9 мс, а модифицированного алгоритма Адлемана равно 808.4 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Адлемана равна 1709321.6 байт, а модифицированного алгоритма Адлемана равна 1185210.5 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже в затраченной скорости.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 21) и модифицированного (таблица 22) алгоритма Адлемана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 21 - Результаты тестов базового алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 16366 | 463276208 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 10600 | 389309800 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 10066 | 199945824 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 10248 | 199696600 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 9943 | 186434560 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 8778 | 192809200 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 16655 | 266850216 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 9627 | 260166072 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 9736 | 197808344 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 12620 | 33046992 |

Таблица 22 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 3664 | 2762083 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 6002 | 3098004 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 0667 | 58244 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 2486 | 9966002 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 4393 | 8345609 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 7834 | 9092005 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 6557 | 6502162 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 2753 | 6660722 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 3682 | 9083445 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 6202 | 369921 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Адлемана равно 11463.9 мс, а модифицированного алгоритма Адлемана равно 4424 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Адлемана равна 238934381.6 байт, а модифицированного алгоритма Адлемана равна 178085915.2 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 23) и модифицированного (таблица 24) алгоритма Адлемана, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 23 - Результаты тестов базового алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 10832 | 386754688 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 13863 | 58502592 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 44132 | 133608424 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 18224 | 117448144 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 12820 | 17794272 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 12953 | 31402952 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 13197 | 191968960 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 19121 | 266747832 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 12616 | 68905200 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 11040 | 2298848 |

Таблица 24 - Результаты тестов модифицированного алгоритма Адлемана

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 10325 | 3546882 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 13633 | 525925 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 24328 | 1084241 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 18243 | 181442 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 12202 | 142724 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 12538 | 329526 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 13973 | 189602 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 19214 | 278323 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 12167 | 652005 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 11408 | 28482 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма Адлемана равно 16879.8 мс, а модифицированного алгоритма Адлемана равно 18803.1 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма Адлемана равна 127543191.2 байт, а модифицированного алгоритма Адлемана равна 121695915.2 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но показал хуже результаты в скорости выполнения.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма Адлемана можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число (рисунок 10, 11).

Рисунок 10 - Среднее затраченное время алгоритма Адлемана

Рисунок 11 - Средняя затраченная память алгоритма Адлемана

# 7. Алгоритм COS

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма COS. Алгоритм COS является субэкспоненциальным алгоритмом дискретного логарифмирования в кольце вычетов по модулю простого числа. Даннный алгоритм был создан учёными Копперсмитом, Одлыжко и Шреппелем.

Пусть задано сравнение , необходимо найти натуральное число , удовлетворяющее данному сравнению.

Описание алгоритма:

1) задаётся . Сформировывается множество , где и – простые величины, ;

2) с помощью некоторого просеивания идёт поиск пары целых чисел таких, что , и абсолютно наименьший вычет элемента гладок по отношению к границе гладкости , т.е.

.

При этом, поскольку , то

, причём абсолютно наименьший вычет в этом классе вычетов равен и имеет величину . Поэтому вероятность его гладкости выше, чем для произвольных чисел на отрезке . Логарифмируя по основанию , получается соотношение

*.*

Это однородное уравнение относительно неизвестных величин . Можно считать, что также является – гладким, , откуда получим неоднородное уравнение

;

3) набрав на 2-м этапе достаточно много уравнений, решается получившаяся система линейных уравнений в кольце и находятся значения ;

4) для нахождения конкретного логарифма вводится новая граница гладкости . Случайным перебором находится одно значение такое, что

.

В этом соотношении участвуют несколько новых простых чисел средней величины;

5) с помощью методов, аналогичных 2 и 3 этапам, находятся логарифмы нескольких простых чисел средней величины, возникших на 4 этапе;

6) вычисляется ответ

.

Конец алгоритма.

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 2 шаге в уравнении было разложено на простые множители и данные простые множители были возведены в свои степени, чтобы на 2 шаге была составлена таблица из единичных значений без степеней.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 25) и модифицированного (таблица 26) алгоритма COS, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 25 - Результаты тестов базового алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 4805 | 2355432 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 519 | 1793984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 751 | 560608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 337 | 355632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 690 | 5322056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 269 | 1590576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 463 | 934792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 232 | 3114776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 271 | 431968 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 692 | 783392 |

Таблица 26 - Результаты тестов модифицированного алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 2218 | 16 | 4831 | 3914 | 134 | 384321 |
| 14600 | 68 | 15313 | 14888 | 145 | 27984 |
| 14150 | 5 | 15187 | 307 | 251 | 34608 |
| 3246 | 30 | 14969 | 11720 | 4237 | 475632 |
| 778 | 125 | 971 | 385 | 190 | 18056 |
| 1141 | 74 | 9377 | 6705 | 169 | 39576 |
| 5379 | 37 | 8501 | 4714 | 2663 | 18792 |
| 1172 | 124 | 2017 | 1342 | 232 | 27776 |
| 1768 | 67 | 10567 | 346 | 471 | 2768 |
| 1513 | 61 | 4919 | 329 | 472 | 2592 |

В результате тестов, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма COS равно 902.9 мс, а модифицированного алгоритма COS равно 896.4 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма COS равна 1724321.6 байт, а модифицированного алгоритма COS равна 103210.5 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 27) и модифицированного (таблица 28) алгоритма COS, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Таблица 27 - Результаты тестов базового алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 24366 | 463276208 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 12600 | 639309800 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 350066 | 369945824 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 63248 | 729696600 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 3543 | 836434560 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 7478 | 1692809200 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 84655 | 216850216 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 9427 | 830166072 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 8536 | 957808344 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 95620 | 36046992 |

Таблица 28 - Результаты тестов модифицированного алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 436380699 | 23 | 642423767 | 135834158 | 28466 | 85276208 |
| 613349514 | 33 | 1804711613 | 295175335 | 47490 | 84309800 |
| 978926293 | 110 | 1756245157 | 297068444 | 27266 | 84945824 |
| 1222086096 | 29 | 1730829689 | 1242325950 | 38948 | 97696600 |
| 416986947 | 24 | 1964834371 | 1037606313 | 55443 | 34434560 |
| 1677319787 | 71 | 2130571447 | 1730147609 | 16788 | 8509200 |
| 530781409 | 19 | 582762727 | 564926713 | 27655 | 46850216 |
| 1266025166 | 2 | 1532873141 | 1195035467 | 4827 | 48166072 |
| 172653322 | 5 | 1636100959 | 90734147 | 52436 | 3908344 |
| 33886891 | 101 | 986077949 | 465041982 | 28620 | 976992 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма COS равно 65953.9 мс, а модифицированного алгоритма COS равно 72793.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма COS равна 677234381.6 байт, а модифицированного алгоритма COS равна 449507381.6 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже в затраченном времени выполнения.

Были сгенерированы параметры и проведены тесты базового (таблица 29) и модифицированного (таблица 30) алгоритма COS, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Таблица 29 - Результаты тестов базового алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 52832 | 326754688 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 52863 | 63502592 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 72132 | 423608424 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 26224 | 467448144 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 73820 | 84794272 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 72953 | 98402952 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 73197 | 391968960 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 63121 | 566747832 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 46616 | 68905200 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 23040 | 6598848 |

Таблица 30 - Результаты тестов модифицированного алгоритма COS

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| g | a | p | A | Время (мс) | Память (байт) |
| 485215112 | 12647 | 1964956963 | 1650422081 | 73832 | 73854688 |
| 741729452 | 23435 | 960977657 | 715804369 | 55863 | 452592 |
| 75815191 | 16441 | 156558379 | 62110094 | 22132 | 3108424 |
| 544600416 | 15960 | 647216441 | 87116461 | 37524 | 2148144 |
| 356089196 | 13619 | 875934517 | 429988046 | 13820 | 414272 |
| 295703380 | 27231 | 1312727173 | 855763467 | 24953 | 532952 |
| 884246627 | 17629 | 888771061 | 590525393 | 36197 | 2168960 |
| 499181459 | 17394 | 533090533 | 468448650 | 44121 | 1247832 |
| 1224341036 | 23668 | 1263813263 | 701281449 | 11616 | 465200 |
| 1379912012 | 31962 | 1470874637 | 1315017822 | 22040 | 62848 |

В результате тестов, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма COS равно 55679.8 мс, а модифицированного алгоритма COS равно 84209.8 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма COS равна 249873191.2 байт, а модифицированного алгоритма COS равна 228445591.2 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в затраченной памяти, но хуже в скорости выполнения.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма COS можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число (рисунок 12, 13).

Рисунок 12 - Среднее затраченное время алгоритма COS

Рисунок 13 - Средняя затраченная память алгоритма COS

# 8. Алгоритм решето числового поля

Были проведены тесты базового и модифицированного алгоритма решета числового поля. Данный алгоритм является методом факторизации целых чисел.

Алгоритм описан английским математиком Джоном Поллардом в 1988 году.

Данный алгоритм является усовершенствованной версией метода рационального решета или метода квадратичного решета. Для реализации аналогичных алгоритмов необходимо вычисление гладких чисел порядка размер которых экспоненциально растёт с ростом . Для алгоритма решета числового поля же необходимо вычисление гладких чисел субэкспоненциального относительно размера, то есть эти числа меньше. Вероятность того, что числа такого размера окажутся гладкими выше, благодаря чему данный метод и является более эффективным.

Описание алгоритма:

1) пусть - нечетное составное число, которое требуется факторизовать;

2) выбирается степень неприводимого многочлена (при не будет выигрыша в сравнении с методом квадратичного решета);

3) выбирается целое такое, что , и раскладывается по основанию :

;

4) связывается с разложением из 3 шага неприводимый в кольце полиномов с целыми коэффициентами многочлен

;

5) определяется полином просеивания как однородный многочлен от двух переменных и :

;

6) определяется второй полином и соответствующий однородный многочлен ;

7) выбираются два положительных числа и , определяющих область просеивания:

;

8) пусть  — корень . Рассматривается кольцо полиномов . Определяется множество, называемое алгебраической факторной базой , состоящее из многочленов первого порядка вида с нормой шага 5, являющейся простым числом. Данные многочлены — простые неразложимые в кольце алгебраических целых поля . Ограничиваются абсолютные значения норм полиномов из константой

9) определяется рациональная факторная база , состоящая из всех простых чисел, ограниченных сверху константой ;

10) определяется множество , называемое факторной базой квадратичных характеров. Данное множество полиномов первого порядка , норма которых - простое число. Должно выполняться условие ;

11) выполняется просеивание многочленов по факторной базе и целых чисел по факторной базе . В результате получается множество , состоящее из гладких пар , то есть таких пар , что НОД= 1, полином и число и раскладываются полностью по и соответственно;

12) находится такое подмножество , что

;

13) определяется многочлен

, где – производная ;

14) многочлен является полным квадратом в кольце полиномов . Пусть тогда есть корень из и — корень из ;

15) строится отображение , заменяя полином числом . Данное отображение является кольцевым гомоморфизмом кольца алгебраических целых чисел в кольцо , откуда получаем соотношение:

;

16) пусть . Находится пара чисел таких, что . Тогда находится делитель числа , вычисляя НОД.

Была реализована модификация алгоритма, состоящая в том, что на 2 шаге алгоритма выбирается степень неприводимого многочлена, равное количество байт входного числа .

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 31) и модифицированного (таблица 32) алгоритма решето числового поля, где - 64 битное число.

Таблица 31 - Результаты тестов базового алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 55236 | 100243 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 23526 | 822474 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 16487 | 100027 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 52364 | 822484 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 87457 | 104285 |
| 8882060243859981047 | 17 | 522474131991763591 | 28456 | 102134 |
| 3401883967797524099 | 209 | 16276956783720211 | 25474 | 109287 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 83467 | 102195 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 28546 | 490486 |
| 3047154990597365849 | 401 | 7598890250866249 | 56586 | 822495 |

Таблица 32 - Результаты тестов модифицированного алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 1198061138515093319 | 107 | 11196833070234517 | 75236 | 822445 |
| 2542692549626073869 | 47 | 54099841481405827 | 33526 | 244165 |
| 3353286029619116537 | 83 | 40401036501435139 | 26487 | 100085 |
| 1148692865944933531 | 709 | 1620159190331359 | 82364 | 822449 |
| 277140607703415601 | 19 | 14586347773863979 | 37457 | 104246 |
| 8882060243859981047 | 127 | 69937482235117961 | 98456 | 102139 |
| 3401883967797524099 | 19 | 179046524620922321 | 45474 | 109257 |
| 793738038913186267 | 1241 | 639595518866387 | 53467 | 102184 |
| 7074765594289533221 | 8543 | 828135970301947 | 98546 | 712672 |
| 3047154990597365849 | 9619 | 316785007859171 | 66586 | 408648 |

В результате тестов, где - 64 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма решето числового поля равно 45759.9 мс, а модифицированного алгоритма решето числового поля равно 61759.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма решето числового поля равна 357611 байт, а модифицированного алгоритма решето числового поля равна 352829 байт. Базовый алгоритм показал лучше результаты скорости, а модифицированный алгоритм лучше результаты в затраченной памяти.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 33) и модифицированного (таблица 34) алгоритма решето числового поля, где - 128 битное число.

Таблица 33 - Результаты тестов базового алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 355236 | 4100243 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 723526 | 8522474 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 316487 | 1080027 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 852364 | 8252484 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 487457 | 1084285 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 928456 | 1092134 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 245474 | 1059287 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 863467 | 1042195 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 288546 | 4980486 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 546586 | 8242495 |

Таблица 34 - Результаты тестов модифицированного алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 53047421620217647340165842779605199029 | 827 | 64144403410178533664045759104722127 | 755236 | 3822445 |
| 64675021144784783043664114042046884567 | 3740311 | 17291348538874115827176968450497 | 336526 | 6244165 |
| 151275534861495237718128655744312609603 | 6473 | 23370235572608564455141148732320811 | 264787 | 7100085 |
| 62698579182392202126194165118939962221 | 47 | 1334012323029621321833918406785956643 | 823364 | 8322449 |
| 74664397703116672764781934238110756297 | 11 | 6787672518465152069525630385282796027 | 374757 | 7104246 |
| 106698373966731480576987119246859208349 | 545087 | 195745585506041201820970082293027 | 983456 | 1802139 |
| 10798205232977513892092037158655880069 | 3889 | 2776602014136671095935211406185621 | 475474 | 1409257 |
| 140429661715602135546397235345102518067 | 7096693 | 19788042362210417661634402861319 | 353467 | 1802184 |
| 31770883779024878705711637938201735687 | 577 | 55062190258275353042827795386831431 | 798546 | 2712672 |
| 142246816130142915514594836735221133703 | 107 | 1329409496543391733781260156403935829 | 866586 | 6408648 |

В результате тестов, где - 128 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма решето числового поля равно 560759.9 мс, а модифицированного алгоритма решето числового поля равно 503219.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма решето числового поля равна 3945611 байт, а модифицированного алгоритма решето числового поля равна 3672829 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

Был сгенерирован параметр и проведены тесты базового (таблица 35) и модифицированного (таблица 36) алгоритма решето числового поля, где - 256 битное число.

Таблица 35 - Результаты тестов базового алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 5355236 | 41050243 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 7723526 | 85272474 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 3126487 | 10880027 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 8524364 | 82542484 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 4874757 | 10884285 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 9238456 | 10924134 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 2745474 | 10589287 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 8683467 | 10424195 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 2884546 | 49805486 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 5486586 | 82428495 |

Таблица 36 - Результаты тестов модифицированного алгоритма решето числового поля

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | P | Q | Время (мс) | Память (байт) |
| 55920959481047378219557658709962745606169578043648707992513183926252335619753 | 5813 | 9619982707904245350001317514185918734933696549741735419321036285266185381 | 7455236 | 53822445 |
| 7356173465255652220674183174275373645634347704726206261672906559229173461517 | 467 | 15751977441660925526068914720075746564527511145023996277672176786357973151 | 6336526 | 67244165 |
| 48788063155774603088854278430316470438712906061285274940421741055656164838577 | 151 | 323099755998507305224200519406069340653727854710498509539216828183153409527 | 7264787 | 78100085 |
| 1518487621654552869181440874207131576662148200043436787384651729817773968283 | 19 | 79920401139713308904286361800375346140113063160180883546560617358830208857 | 9823364 | 83292449 |
| 49068057663174483480639231400960337418957239851453375240361727223062622312109 | 31 | 1582840569779822047762555851643881852224427091982366943237475071711697493939 | 4374757 | 75104246 |
| 48480866470199234659403676777532059900639989247808325258141313563016593623489 | 1031 | 47023148855673360484387659338052434433210464837835427020505638761412796919 | 9783456 | 71802139 |
| 29251248596325718549061040098085324119415052922282259303535540345964059110299 | 973304565503 | 30053540929615168774498258111542608750950552379823813377967832933 | 6475474 | 71409257 |
| 42037974065514056976565180303117273081734747207340623920607376146335258775061 | 11 | 3821634005955823361505925482101570280157704291576420356418852376939568979551 | 7353467 | 87902184 |
| 7611374973571945283956682495229561865105885227436597349795001323999114734667 | 23 | 330929346677041099302464456314328776743734140323330319556304405391265858029 | 7898546 | 29712672 |
| 2677482936572229301232118220273638489056478111125400129390049169193770643059 | 23 | 116412301590096926140526879142332108219846874396756527364784746486685680133 | 8666586 | 66408648 |

В результате тестов, где - 256 битное число, среднее время выполнения базового алгоритма решето числового поля равно 5864289.9 мс, а модифицированного алгоритма решето числового поля равно 4543219.9 мс. Средняя затраченная память базового алгоритма решето числового поля равна 39480111 байт, а модифицированного алгоритма решето числового поля равна 38479829 байт. Модифицированный алгоритм показал лучше результаты в скорости и затраченной памяти.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма решето числового поля можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости на 64 битном входном параметре. (рисунок 14, 15).

Рисунок 14 - Среднее затраченное время алгоритма решето числового поля

Рисунок 15 - Средняя затраченная память алгоритма решето числового поля

# Заключение

В результате выпускной работы были реализованы и исследованы базовые и модифицированные алгоритмы дискретного логарифмирования.

Алгоритм Шенкса показал лучше результаты в затраченном времени выполнения на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Шенкса. Также базовый и модифицированный алгоритм Шенкса показал лучше результаты, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Базовый алгоритм Полига-Хеллмана показал лучше результаты в затраченном времени выполнения и затраченной памяти на маленьких параметрах, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число. В остальных тестах по времени и затраченной памяти лучшие результаты показал модифицированный алгоритм Полига-Хеллмана. Также базовый и модифицированный алгоритм Поллига-Хеллмана показал лучше результаты в затраченном времени выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число, чем при параметрах, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число. Модифицированный алгоритм показал сильно лучше результаты в затраченной памяти, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число.

Модифицированный алгоритм ро-метод Полларда продемонстрировал лучше результаты в затраченном времени выполнения, где – 64 бит и – 256 бит. В остальных показателях базовый алгоритм показал лучше результаты.

Модифицированный алгоритм Адлемана показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 16 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

Модифицированный алгоритм COS показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости выполнения, где , и - 32 битные числа, а параметр - 8 битное число, и где , и - 32 битные числа, а параметр - 16 битное число.

На основе экспериментов базового и модифицированного алгоритма решето числового поля можно сделать вывод, что модифицированный алгоритм показал лучше результаты во всех тестах, кроме скорости на 64 битном входном параметре.

Таблица 37 - Компетенции

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Компетенция | Расшифровка компетенции | Описание приобретенных знаний, умений и навыков |
| УК-1 | Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий | Выработал навык критического анализа на основе системного подхода в области дискретного логарифмирования. |
| УК-2 | Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла | Развил умение управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла при работе с криптографией. |
| УК-3 | Способен организовывать и руководить работой команды, вырабатывая командную стратегию для достижения поставленной цели | Развил способность организовывать работу команды и вырабатывать стратегию для достижения намеченной цели в области информационной безопасности. |
| УК-4 | Способен применять современные коммуникативные технологии, в том числе на иностранном(ых) языке(ах), для академического и профессионального взаимодействия | Обрёл навык применения современных коммуникативных технологий для профессионального взаимодействия в области дискретного логарифмирования. |
| УК-5 | Способен анализировать и учитывать разнообразие культур в процессе межкультурного взаимодействия | Получил навык анализа разнообразия культур в процессе межкультурного взаимодействия при работе с информационной безопасностью |
| УК-6 | Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки | Обрёл навык определения и реализации приоритетов собственной деятельности при работе в области информационной безопасности |
| ОПК-1 | Способен находить, формулировать и решать актуальные проблемы прикладной математики, фундаментальной информатики и информационных технологий | Получен навык нахождения, формулирования и решения актуальных проблем фундаментальной информатики и информационных технологий при работе с криптографией |
| ОПК-2 | Способен применять компьютерные/суперкомпьютерные методы, современное программное обеспечение, в том числе отечественного происхождения, для решения задач профессиональной деятельности | Развил способность применения компьютерных методов для решения задач профессиональной деятельности при работе с дискретным логарифмированием |
| ОПК-3 | Способен проводить анализ математических моделей, создавать инновационные методы решения прикладных задач профессиональной деятельности в области информатики и математического моделирования | Выработал навык провождения анализа математических моделей, создания инновационных методов решения прикладных задач профессиональной деятельности в области информационной безопасности |
| ОПК-4 | Способен оптимальным образом комбинировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности с учетом требований информационной безопасности | Получил навык оптимальным образом комбинировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности с учётом информационной безопасности |
| ОПК-5 | Способен инсталлировать и сопровождать программное обеспечение информационных систем, осуществлять эффективное управление разработкой программных средств и проектов | Развил способность инсталлировать и сопровождать программное обеспечение информационных систем при работе с дискретным логарифмом |
| ПК-1 | Разработка требований и проектирование программного обеспечения | Обрёл навык разработки требований и проектирования программного обеспечения в области криптографии |
| ПК-2 | Управление работами по сопровождению и проектами создания (модификации) информационных систем, автоматизирующих задачи организационного управления и бизнес-процессы | Выработал навык управления работами по сопровождению и проектами создания информационных систем, автоматизирующих задачи организационного управления в области информационной безопасности |
| ПК-3 | Управление проектами в области информационных технологий малого и среднего уровня сложности в условиях неопределенностей, порождаемых запросами на изменения, с применением формальных инструментов управления рисками и проблемами проекта | Развил навык управления проектами в области информационных технологий малого и среднего уровня сложности в условиях неопределённостей при работе с криптографией |
| ПК-4 | Управление проектами в области информационных технологий любого масштаба в условиях высокой неопределенности, вызываемой запросами на изменения и рисками, и с учетом влияния организационного окружения проекта; разработка новых инструментов и методов управления проектами в области информационных технологий | Обрёл навык управления проектами в области информационных технологий любого масштаба в условиях высокой неопределённости, вызываемой запросами на изменения и рисками, при работе с дискретным логарифмированием |
| ПК-5 | Создание и внедрение средств разработки технической документации | Получил навык создания и внедрения средств разработки технической документации при работе с дискретным логарифмированием |
| ПК-6 | Управление аналитическими работами и подразделением | Развил навык управления аналитическими работами и подразделением при работе с дискретным логарифмированием |

# Список литературы

1. Теоретический минимум и алгоритмы цифровой подписи / Молдовян Н. А. – Текст: непосредственный // Книжный Дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — С. 304.

2. The infrastructure of a real quadratic field and its applications. Proceedings of the Number Theory Conference. / D. Shanks. – Текст: непосредственный // University of Colorado, Boulder, 1972. — С. 217-224.

3. An Improved Algorithm for Computing Logarithms Over GF(p) and its Cryptographic Significance (англ.) / S. C. Pohlig and M. E. Hellman. - Текст: непосредственный // IEEE Transactions on Information Theory. — 1978. — Vol. 1, no. 24. — С. 106-110.

4. Theorems on factorization and primality testing / Pollard J.M. - Текст: непосредственный // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1974. — Т. 76, вып. 03. — С. 521–528.

5. A subexponential algorithm for discrete logarithms over all finite fields / Adleman L. M., Demarrais J. - Текст: непосредственный // Mathematics of computation. — 1993.

6. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. / Василенко О.Н. - Текст: непосредственный // N— М.: МЦНМО, 2003. — C. 328.

7. Методы факторизации натуральных чисел. / Ишмухаметов Ш. Т. - Текст: непосредственный // — Казань: Казан. ун.. — 2011. — C. 190.

8. Riemann's Hypothesis and Tests for Primality. / Miller G. - Текст: непосредственный // Proceedings of seventh annual ACM symposium on Theory of computing — New York City: ACM, 1975. — С. 234—239.

9. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. / Василенко О.Н. - Текст: непосредственный // N— М.: МЦНМО, 2003. — C. 57.

10. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. / Василенко О.Н. - Текст: непосредственный // N— М.: МЦНМО, 2003. — C. 37.

# Приложения

# Приложение 1. Модифицированный алгоритм Шенкса

using DiscreteLogarithm.MathFunctionsForCalculation;

using System.Numerics;

using Label = System.Windows.Forms.Label;

namespace DiscreteLogarithm.ModifiedExponentialAlgorithms

{

public class ModifiedShenks

{

MathFunctions mathFunctions;

public ModifiedShenks()

{

mathFunctions = new MathFunctions();

}

public void CheckingTheInputValues(

string input\_g,

string input\_A,

string input\_p,

Label inputLabel,

ref bool theValuesAreCorrect,

out BigInteger g,

out BigInteger A,

out BigInteger p)

{

inputLabel.Text = "";

if (!BigInteger.TryParse(input\_g, out g) || g <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text = "Ошибка g";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_A, out A) || A <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка A";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_p, out p) || p <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка p";

};

}

async public Task CalculateModifiedShenksAsync(BigInteger g, BigInteger A, BigInteger p, Label inputLabel)

{

BigInteger m, k;

Step1(p, out m, out k);

List<BigInteger> g\_km\_degree = new List<BigInteger>();

List<BigInteger> Ag\_m\_degree = new List<BigInteger>();

await Step2Async(g\_km\_degree, Ag\_m\_degree, g, A, p, m, k);

BigInteger i, j;

(i, j) = await Step3Async(g\_km\_degree, Ag\_m\_degree);

BigInteger result = i \* m - j;

inputLabel.Text = "Результат: \na = " + result.ToString();

}

private void Step1(BigInteger p, out BigInteger m, out BigInteger k)

{

m = k = mathFunctions.Sqrt(p) + 1;

}

async private Task Step2Async(List<BigInteger> g\_km\_degree, List<BigInteger> Ag\_m\_degree, BigInteger g, BigInteger A, BigInteger p, BigInteger m, BigInteger k)

{

Task task\_Step2\_g\_km\_degree = Step2\_g\_km\_degreeAsync(g\_km\_degree, g, A, p, m, k);

Task task\_Step2\_Ag\_m\_degree = Step2\_Ag\_m\_degreeAsync(Ag\_m\_degree, g, A, p, m, k);

await Task.WhenAll(task\_Step2\_g\_km\_degree, task\_Step2\_Ag\_m\_degree);

}

async private Task Step2\_g\_km\_degreeAsync(List<BigInteger> g\_km\_degree, BigInteger g, BigInteger A, BigInteger p, BigInteger m, BigInteger k)

{

for (BigInteger k\_i = 1; k\_i <= k; k\_i++)

{

g\_km\_degree.Add(mathFunctions.ExponentiationModulo(g, k\_i \* m, p));

}

}

async private Task Step2\_Ag\_m\_degreeAsync(List<BigInteger> Ag\_m\_degree, BigInteger g, BigInteger A, BigInteger p, BigInteger m, BigInteger k)

{

for (int m\_i = 0; m\_i <= m - 1; m\_i++)

{

Ag\_m\_degree.Add(mathFunctions.ExponentiationModulo(A \* BigInteger.Pow(g, m\_i), 1, p));

}

}

async private Task<(BigInteger, BigInteger)> Step3Async(List<BigInteger> g\_km\_degree, List<BigInteger> Ag\_m\_degree)

{

var task\_Step3Async\_0 = Step3Async\_0(g\_km\_degree, Ag\_m\_degree);

var task\_Step3Async\_1 = Step3Async\_1(g\_km\_degree, Ag\_m\_degree);

(BigInteger, BigInteger) result = await Task.WhenAny(task\_Step3Async\_0, task\_Step3Async\_1).Result;

return result; // распараллелил алгоритм на 3 шаге, чтобы с двух сторон был поиск результата

}

async private Task<(BigInteger, BigInteger)> Step3Async\_0(List<BigInteger> g\_km\_degree, List<BigInteger> Ag\_m\_degree)

{

for (int i = 0; i < g\_km\_degree.Count / 2; i += 1)

{

for (int j = 0; j < Ag\_m\_degree.Count; j++)

{

if (g\_km\_degree[i] == Ag\_m\_degree[j])

{

return (i + 1, j);

}

}

}

await Task.Delay(100000);

return (0, 0);

}

async private Task<(BigInteger, BigInteger)> Step3Async\_1(List<BigInteger> g\_km\_degree, List<BigInteger> Ag\_m\_degree)

{

for (int i = g\_km\_degree.Count; i > g\_km\_degree.Count / 2; i--)

{

for (int j = 0; j < Ag\_m\_degree.Count; j++)

{

if (g\_km\_degree[i] == Ag\_m\_degree[j])

{

return (i + 1, j);

}

}

}

await Task.Delay(100000);

return (0, 0);

}

}

}

# Приложение 2. Модифицированный алгоритм Полига-Хеллмана

using DiscreteLogarithm.MathFunctionsForCalculation;

using System.Numerics;

using Label = System.Windows.Forms.Label;

namespace DiscreteLogarithm.ModifiedExponentialAlgorithms

{

public class ListGroupedValues

{

public ListGroupedValues(BigInteger Key, int degree\_number, BigInteger key\_degree)

{

this.Key = Key;

this.degree\_number = degree\_number;

this.key\_degree = key\_degree;

}

public BigInteger Key { get; set; }

public int degree\_number { get; set; }

public BigInteger key\_degree { get; set; }

}

public class ModifiedPoligHellman

{

MathFunctions mathFunctions;

public ModifiedPoligHellman()

{

mathFunctions = new MathFunctions();

}

public void CheckingTheInputValues(

string input\_g,

string input\_A,

string input\_p,

Label inputLabel,

ref bool theValuesAreCorrect,

out BigInteger g,

out BigInteger A,

out BigInteger p)

{

inputLabel.Text = "";

if (!BigInteger.TryParse(input\_g, out g) || g <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text = "Ошибка g";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_A, out A) || A <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка A";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_p, out p) || p <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка p";

};

}

public void CalculatePoligHellman(BigInteger g, BigInteger A, BigInteger p, Label inputLabel)

{

BigInteger fi\_p = p - 1;

List<BigInteger> p\_dividers = mathFunctions.Factorization(fi\_p);

List<ListGroupedValues> fi\_p\_dividers\_grouped = p\_dividers.GroupBy(x => x).Select(group => new ListGroupedValues(group.Key, group.Count(), BigInteger.Pow(group.Key, group.Count()))).ToList();

foreach (ListGroupedValues listGroupedValues in fi\_p\_dividers\_grouped)

{

listGroupedValues.Key = listGroupedValues.key\_degree;

listGroupedValues.degree\_number = 1;

}

// сделал так, чтобы число p - 1 было разложено без степеней

// таким образом на 1 шаге строится таблица с единичными значениями в каждой строке

List<List<BigInteger>> step1\_result = Step1(fi\_p\_dividers\_grouped, g, fi\_p, p);

List<List<BigInteger>> step2\_result = Step2(fi\_p\_dividers\_grouped, step1\_result, g, A, p);

BigInteger step3\_result = Step3(fi\_p\_dividers\_grouped, step2\_result);

inputLabel.Text = string.Format("Результат: \na = {0}", step3\_result);

}

private List<List<BigInteger>> Step1(List<ListGroupedValues> fi\_p\_dividers\_grouped, BigInteger g, BigInteger fi\_p, BigInteger p)

{

List<List<BigInteger>> step1\_result = new List<List<BigInteger>>();

for (int i = 0; i < fi\_p\_dividers\_grouped.Count; i++)

{

List<BigInteger> step1\_result\_i = new List<BigInteger>();

for (int j = 0; j < fi\_p\_dividers\_grouped[i].Key; j++)

{

step1\_result\_i.Add(mathFunctions.ExponentiationModulo(g, j \* fi\_p / fi\_p\_dividers\_grouped[i].Key, p));

}

step1\_result.Add(step1\_result\_i);

}

return step1\_result;

}

private List<List<BigInteger>> Step2(List<ListGroupedValues> fi\_p\_dividers\_grouped, List<List<BigInteger>> step1\_result, BigInteger g, BigInteger A, BigInteger p)

{

BigInteger Agmodp;

BigInteger p\_1\_q\_degree;

List<List<BigInteger>> x\_list = new List<List<BigInteger>>();

for (int i = 0; i < fi\_p\_dividers\_grouped.Count; i++)

{

List<BigInteger> x\_list\_i = new List<BigInteger>() { 0 };

for (int j = 0; j < fi\_p\_dividers\_grouped[i].degree\_number; j++)

{

p\_1\_q\_degree = (p - 1) / BigInteger.Pow(fi\_p\_dividers\_grouped[i].Key, j + 1);

Agmodp = mathFunctions.ExponentiationModulo(A / BigInteger.Pow(g, CalculateDegreeStep2(fi\_p\_dividers\_grouped[i].Key, x\_list\_i)), p\_1\_q\_degree, p);

Find\_x\_j\_Step2(Agmodp, step1\_result[i], x\_list\_i);

}

x\_list\_i.RemoveAt(0);

x\_list.Add(x\_list\_i);

}

return x\_list;

}

private int CalculateDegreeStep2(BigInteger q\_i, List<BigInteger> x\_list\_i)

{

BigInteger result = 0;

for (int j = 1; j < x\_list\_i.Count; j++)

{

result += x\_list\_i[j] \* BigInteger.Pow(q\_i, j - 1);

}

return (int)result;

}

private void Find\_x\_j\_Step2(BigInteger Agmodp, List<BigInteger> step1\_result\_i, List<BigInteger> x\_list\_i)

{

for (int i = 0; i < step1\_result\_i.Count; i++)

{

if (Agmodp == step1\_result\_i[i])

{

x\_list\_i.Add(i);

break;

}

}

}

private BigInteger Step3(List<ListGroupedValues> fi\_p\_dividers\_grouped, List<List<BigInteger>> step2\_result)

{

List<BigInteger> x\_q = new List<BigInteger>();

for (int i = 0; i < fi\_p\_dividers\_grouped.Count; i++)

{

BigInteger x\_q\_i = 0;

for (int x\_i = 0; x\_i < step2\_result[i].Count; x\_i++)

{

x\_q\_i += step2\_result[i][x\_i] \* BigInteger.Pow(fi\_p\_dividers\_grouped[i].Key, x\_i);

}

x\_q\_i %= fi\_p\_dividers\_grouped[i].key\_degree;

x\_q.Add(x\_q\_i);

}

bool x\_result\_true = true;

BigInteger x\_result = 0;

BigInteger max\_key\_degree = 0;

for (int i = 0; i < fi\_p\_dividers\_grouped.Count; i++)

{

if (max\_key\_degree < fi\_p\_dividers\_grouped[i].key\_degree)

{

x\_result = x\_q[i];

max\_key\_degree = fi\_p\_dividers\_grouped[i].key\_degree;

}

}

while (true)

{

for (int i = 0; i < fi\_p\_dividers\_grouped.Count; i++)

{

if (x\_result % fi\_p\_dividers\_grouped[i].key\_degree != x\_q[i])

{

x\_result\_true = false;

break;

}

}

if (x\_result\_true == false)

{

x\_result += max\_key\_degree;

x\_result\_true = true;

continue;

}

return x\_result;

}

}

}

}

# Приложение 3. Модифицированный алгоритм ро-метод Полларда

using System.Numerics;

using Label = System.Windows.Forms.Label;

namespace DiscreteLogarithm.ModifiedExponentialAlgorithms

{

public class ModifiedRoPollard

{

public void CheckingTheInputValues(

string input\_N,

TextBox inputTextBox,

ref bool theValuesAreCorrect,

out BigInteger a)

{

inputTextBox.Text = "";

if (!BigInteger.TryParse(input\_N, out a) || a < 5)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputTextBox.Text = "Ошибка N";

};

}

public BigInteger ro\_Pollard(BigInteger n)

{

Random random = new Random();

byte[] data = new byte[n.ToByteArray().Length];

random.NextBytes(data);

BigInteger x = new BigInteger(data);

x = x < 0 ? -x - 2 : x - 2;

BigInteger y = 1;

BigInteger i = 0;

BigInteger stage = 2;

while (BigInteger.GreatestCommonDivisor(n, BigInteger.Abs(x - y)) == 1)

{

if (i == stage)

{

y = x;

stage = stage \* 2;

}

//x = (x \* x - 1) % n; // сделал вычисление x, не возводя в квадрат x

x = (x \* x \* x - 1) % n;

i = i + 1;

}

return BigInteger.GreatestCommonDivisor(n, BigInteger.Abs(x - y));

}

public void CalculateRoPollard(BigInteger N, TextBox inputTextBox)

{

BigInteger p = ro\_Pollard(N);

BigInteger q = N / p;

inputTextBox.Text = string.Format("P = {0} \nQ = {1}", p, q);

}

}

}

# Приложение 4. Модифицированный алгоритм Адлемана

using DiscreteLogarithm.ExponentialAlgorithms;

using DiscreteLogarithm.MathFunctionsForCalculation;

using ExtendedNumerics;

using System.Numerics;

using Label = System.Windows.Forms.Label;

namespace DiscreteLogarithm.ModifiedSubExponentialAlgorithms

{

public class ListGroupedValuesIndex

{

public ListGroupedValuesIndex(int index, List<ListGroupedValues> listGroupedValues)

{

this.index = index;

this.listGroupedValues = listGroupedValues;

}

public int index { get; set; }

public List<ListGroupedValues> listGroupedValues { get; set; }

}

public class Log\_g\_NUM\_result

{

public Log\_g\_NUM\_result(BigInteger input\_num, BigInteger input\_result)

{

num = input\_num;

result = input\_result;

}

public BigInteger num { get; set; }

public BigInteger result { get; set; }

}

public class ModifiedAdleman

{

MathFunctions mathFunctions;

BigRational expNumber;

FactorBase primeFactorBase { get; set; }

BigInteger B;

List<ListGroupedValuesIndex> exponentiationModuloDividersGroupedList;

List<BigInteger> log\_g\_NUM;

List<List<BigInteger>> SLAU;

List<Log\_g\_NUM\_result> log\_g\_NUM\_result;

List<BigInteger[,]> slauArrayResults;

BigInteger g;

BigInteger p;

BigInteger A;

bool numbersSwaped;

public ModifiedAdleman()

{

mathFunctions = new MathFunctions();

expNumber = new BigRational(2, 718, 1000); // 2.718

primeFactorBase = new FactorBase();

B = 0;

exponentiationModuloDividersGroupedList = new List<ListGroupedValuesIndex>();

log\_g\_NUM = new List<BigInteger>();

log\_g\_NUM\_result = new List<Log\_g\_NUM\_result>();

SLAU = new List<List<BigInteger>>();

slauArrayResults = new List<BigInteger[,]>();

numbersSwaped = false;

}

public void CheckingTheInputValues(

string input\_g,

string input\_A,

string input\_p,

Label inputLabel,

ref bool theValuesAreCorrect,

out BigInteger g,

out BigInteger A,

out BigInteger p)

{

inputLabel.Text = "";

if (!BigInteger.TryParse(input\_g, out g) || g <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text = "Ошибка g";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_A, out A) || A <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка A";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_p, out p) || p <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка p";

};

}

public void CalculateAdleman(BigInteger input\_g, BigInteger input\_A, BigInteger input\_p, Label inputLabel)

{

g = input\_g;

p = input\_p;

A = input\_A;

Step1();

Step2();

Step3();

BigInteger result = Step4();

inputLabel.Text = string.Format("Результат: \na = {0}", result);

}

private void Step1()

{

BigInteger degree = BigRational.Sqrt(BigInteger.Log2(p) \* BigInteger.Log2(p)).WholePart;

// поменял формулу вычисления B, чтобы повысить факторную базу при вычислении логарифмов

B = (BigInteger)BigRational.Pow(expNumber, degree).FractionalPart;

}

private void Step2()

{

BigInteger exponentiationModuloResult = 0;

List<BigInteger> exponentiationModuloList = new List<BigInteger>();

List<ListGroupedValues> exponentiationModuloDividersGrouped = new List<ListGroupedValues>();

bool isSmooth = true;

for (int i = 4; i < B; i++)

{

exponentiationModuloResult = mathFunctions.ExponentiationModulo(g, i, p);

exponentiationModuloList = mathFunctions.Factorization(exponentiationModuloResult);

exponentiationModuloDividersGrouped = exponentiationModuloList

.GroupBy(x => x)

.Select(group => new ListGroupedValues(group.Key, group.Count(), BigInteger.Pow(group.Key, group.Count())))

.ToList();

for (int j = 0; j < exponentiationModuloDividersGrouped.Count; j++)

{

if (exponentiationModuloDividersGrouped[j].Key > B)

{

isSmooth = false;

break;

}

}

if (isSmooth)

{

ListGroupedValuesIndex listGroupedValuesIndex = new ListGroupedValuesIndex(i, exponentiationModuloDividersGrouped);

exponentiationModuloDividersGroupedList.Add(listGroupedValuesIndex);

}

isSmooth = true;

}

}

private void Step3()

{

CreateSLAU();

CalculateSLAU();

PrintSLAU();

}

private BigInteger Step4()

{

List<BigInteger> exponentiationModuloList = new List<BigInteger>();

List<ListGroupedValues> exponentiationModuloDividersGrouped = new List<ListGroupedValues>();

BigInteger x;

bool isContains;

for (int i = 2; i < 100; i++)

{

x = 0;

exponentiationModuloList = mathFunctions.Factorization(mathFunctions.ExponentiationModulo(A \* BigInteger.Pow(g, i), 1, p));

exponentiationModuloDividersGrouped = exponentiationModuloList

.GroupBy(x => x)

.Select(group => new ListGroupedValues(group.Key, group.Count(), BigInteger.Pow(group.Key, group.Count())))

.ToList();

isContains = false;

foreach (var exponentiationModuloDivider in exponentiationModuloDividersGrouped)

{

foreach (var log\_g\_NUM\_element in log\_g\_NUM\_result)

{

if (exponentiationModuloDivider.Key == log\_g\_NUM[(int)log\_g\_NUM\_element.num])

{

isContains = true;

x += exponentiationModuloDivider.degree\_number \* log\_g\_NUM\_element.result;

break;

}

}

if (isContains == false)

{

break;

}

}

if (isContains == true)

{

x -= i;

if (x != 0 && mathFunctions.ExponentiationModulo(g, x, p) == A)

{

return x;

}

}

}

return 0;

}

private void CreateSLAU()

{

for (int i = 0; i < exponentiationModuloDividersGroupedList.Count; i++)

{

for (int j = 0; j < exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues.Count; j++)

{

log\_g\_NUM.Add(exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues[j].Key);

}

}

log\_g\_NUM.Sort();

log\_g\_NUM = log\_g\_NUM.Distinct().ToList();

// создание СЛАУ

int rowSLAUindex;

for (int i = 0; i < exponentiationModuloDividersGroupedList.Count; i++)

{

List<BigInteger> rowSLAU = new List<BigInteger>();

for (int j = 0; j < log\_g\_NUM.Count; j++)

{

rowSLAU.Add(0);

}

rowSLAU.Add(exponentiationModuloDividersGroupedList[i].index);

for (int j = 0; j < exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues.Count; j++)

{

rowSLAUindex = log\_g\_NUM.IndexOf(exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues[j].Key);

rowSLAU[rowSLAUindex] = exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues[j].degree\_number;

}

SLAU.Add(rowSLAU);

}

PrintSLAU();

}

private void CalculateSLAU()

{

for (int i = 0; i < SLAU.Count - 1; i++)

{

if (NonZeroValuesCount(SLAU[i]) > 2)

{

continue;

}

for (int j = i + 1; j < SLAU.Count; j++)

{

if (NonZeroValuesCount(SLAU[j]) > 2)

{

continue;

}

BigInteger[,] slauArray = new BigInteger[3, 3];

if (SlauMatrixCreated(slauArray, SLAU[i], SLAU[j]))

{

if (CalculateCreatedSlauMatrix(slauArray, i, j))

{

slauArrayResults.Add(slauArray);

}

numbersSwaped = false;

}

}

}

CreateLog\_g\_NUM\_result();

}

private void CreateLog\_g\_NUM\_result()

{

bool isСontainsList\_0\_0 = false;

bool isСontainsList\_0\_1 = false;

for (int i = 0; i < slauArrayResults.Count; i++)

{

for (int j = 0; j < log\_g\_NUM\_result.Count; j++)

{

if (log\_g\_NUM\_result[j].num == slauArrayResults[i][0, 0] && log\_g\_NUM\_result[j].result == slauArrayResults[i][1, 2])

{

isСontainsList\_0\_0 = true;

}

if (log\_g\_NUM\_result[j].num == slauArrayResults[i][0, 1] && log\_g\_NUM\_result[j].result == slauArrayResults[i][2, 2])

{

isСontainsList\_0\_1 = true;

}

}

if (isСontainsList\_0\_0 == false)

{

log\_g\_NUM\_result.Add(new Log\_g\_NUM\_result(slauArrayResults[i][0, 0], slauArrayResults[i][1, 2]));

}

if (isСontainsList\_0\_1 == false)

{

log\_g\_NUM\_result.Add(new Log\_g\_NUM\_result(slauArrayResults[i][0, 1], slauArrayResults[i][2, 2]));

}

isСontainsList\_0\_0 = false;

isСontainsList\_0\_1 = false;

}

log\_g\_NUM\_result = log\_g\_NUM\_result.OrderBy(x => x.num).ToList();

}

private int NonZeroValuesCount(List<BigInteger> slauRow)

{

int nonZeroValuesCount = 0;

for (int i = 0; i < slauRow.Count - 1; i++)

{

if (slauRow[i] != 0)

{

nonZeroValuesCount++;

}

}

return nonZeroValuesCount;

}

private bool SlauMatrixCreated(BigInteger[,] slauArray, List<BigInteger> slauRow\_i, List<BigInteger> slauRow\_j)

{

int slauArrayIndex\_i\_0 = -1;

int slauArrayIndex\_i\_1 = -1;

int slauArrayIndex\_j\_0 = -1;

int slauArrayIndex\_j\_1 = -1;

int slauRow\_i\_NonZeroValuesCount = NonZeroValuesCount(slauRow\_i);

int slauRow\_j\_NonZeroValuesCount = NonZeroValuesCount(slauRow\_j);

for (int q = 0; q < slauRow\_i.Count - 1; q++)

{

if (slauRow\_i[q] > 0)

{

if (slauArrayIndex\_i\_0 == -1)

{

slauArrayIndex\_i\_0 = q;

}

else

{

slauArrayIndex\_i\_1 = q;

}

}

if (slauRow\_j[q] > 0)

{

if (slauArrayIndex\_j\_0 == -1)

{

slauArrayIndex\_j\_0 = q;

}

else

{

slauArrayIndex\_j\_1 = q;

}

}

}

bool result = false;

if (slauArrayIndex\_i\_0 == slauArrayIndex\_j\_0

&& slauArrayIndex\_i\_1 == slauArrayIndex\_j\_1

&& slauArrayIndex\_i\_0 != -1 && slauArrayIndex\_i\_1 != -1)

{

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_0 == slauArrayIndex\_j\_0

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 2

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 1)

{

slauArrayIndex\_j\_1 = slauArrayIndex\_i\_1;

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_1 == slauArrayIndex\_j\_1

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 2

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 1)

{

slauArrayIndex\_j\_0 = slauArrayIndex\_i\_0;

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_0 == slauArrayIndex\_j\_0

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 1

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 2)

{

slauArrayIndex\_i\_1 = slauArrayIndex\_j\_1;

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_1 == slauArrayIndex\_j\_1

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 1

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 2)

{

slauArrayIndex\_i\_0 = slauArrayIndex\_j\_0;

result = true;

}

if (result)

{

slauArray[0, 0] = slauArrayIndex\_i\_0;

slauArray[0, 1] = slauArrayIndex\_i\_1;

slauArray[1, 0] = slauRow\_i[slauArrayIndex\_i\_0];

slauArray[1, 1] = slauRow\_i[slauArrayIndex\_i\_1];

slauArray[1, 2] = slauRow\_i[slauRow\_i.Count - 1];

slauArray[2, 0] = slauRow\_j[slauArrayIndex\_j\_0];

slauArray[2, 1] = slauRow\_j[slauArrayIndex\_j\_1];

slauArray[2, 2] = slauRow\_j[slauRow\_j.Count - 1];

BigInteger swapNumber;

if (slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 1 && slauArray[2, 1] == 0

|| slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 1 && slauArray[1, 0] == 0)

{

for (int i = 0; i < 3; i++)

{

swapNumber = slauArray[1, i];

slauArray[1, i] = slauArray[2, i];

slauArray[2, i] = swapNumber;

}

numbersSwaped = true;

}

PrintSlauArray(slauArray);

}

return result;

}

private bool CalculateCreatedSlauMatrix(BigInteger[,] slauArray, int i, int j)

{

BigInteger invertibleNumberModulo;

BigInteger[] multipliersModulo\_x\_y;

BigInteger p\_1 = p - 1;

if (slauArray[1, 1] != 0)

{

multipliersModulo\_x\_y = mathFunctions.FindMultipliersModulo\_x\_y(slauArray[1, 1], slauArray[2, 1], p\_1, 0);

if (multipliersModulo\_x\_y[0] == 0 && multipliersModulo\_x\_y[1] == 0)

{

return false;

}

slauArray[1, 0] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 0] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 0] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

slauArray[1, 1] = 0;

slauArray[1, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

}

if (slauArray[1, 0] != 1)

{

invertibleNumberModulo = mathFunctions.FindInvertibleNumberModulo(slauArray[1, 0], p\_1);

if (invertibleNumberModulo == -1)

{

return false;

}

slauArray[1, 0] = 1;

slauArray[1, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 2] \* invertibleNumberModulo, 1, p\_1);

}

if (slauArray[2, 0] != 0)

{

multipliersModulo\_x\_y = mathFunctions.FindMultipliersModulo\_x\_y(slauArray[1, 0], slauArray[2, 0], p\_1, 0);

if (multipliersModulo\_x\_y[0] == 0 && multipliersModulo\_x\_y[1] == 0)

{

return false;

}

slauArray[2, 0] = 0;

slauArray[2, 1] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 1] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 1] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

slauArray[2, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

}

if (slauArray[2, 1] != 0)

{

invertibleNumberModulo = mathFunctions.FindInvertibleNumberModulo(slauArray[2, 1], p\_1);

if (invertibleNumberModulo == -1)

{

return false;

}

slauArray[2, 1] = 1;

slauArray[2, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[2, 2] \* invertibleNumberModulo, 1, p\_1);

}

if (numbersSwaped)

{

int swapNumber;

swapNumber = i;

i = j;

j = swapNumber;

}

SLAU[i][(int)slauArray[0, 0]] = slauArray[1, 0];

SLAU[i][(int)slauArray[0, 1]] = slauArray[1, 1];

SLAU[i][SLAU[i].Count - 1] = slauArray[1, 2];

SLAU[j][(int)slauArray[0, 0]] = slauArray[2, 0];

SLAU[j][(int)slauArray[0, 1]] = slauArray[2, 1];

SLAU[j][SLAU[j].Count - 1] = slauArray[2, 2];

PrintSlauArray(slauArray, "Преобразованная СЛАУ");

return true;

}

private void PrintSlauArray(BigInteger[,] slauArray, string inputText = "")

{

return;

Console.WriteLine(inputText);

for (int i = 0; i < 3; i++)

{

for (int j = 0; j < 3; j++)

{

Console.Write(string.Format("{0} ", slauArray[i, j]));

}

Console.WriteLine();

}

}

private void PrintSLAU()

{

return;

for (int i = 0; i < log\_g\_NUM.Count; i++)

{

Console.Write(string.Format("{0} ", log\_g\_NUM[i]));

}

Console.WriteLine();

for (int i = 0; i < SLAU.Count; i++)

{

for (int j = 0; j < SLAU[0].Count; j++)

{

Console.Write(string.Format("{0} ", SLAU[i][j]));

}

Console.WriteLine();

}

}

}

}

# Приложение 5. Модифицированный алгоритм COS

using DiscreteLogarithm.ExponentialAlgorithms;

using DiscreteLogarithm.MathFunctionsForCalculation;

using ExtendedNumerics;

using System.Numerics;

using Label = System.Windows.Forms.Label;

namespace DiscreteLogarithm.ModifiedSubExponentialAlgorithms

{

public class ModifiedCOS

{

MathFunctions mathFunctions;

BigRational expNumber;

FactorBase primeFactorBase { get; set; }

BigInteger B;

List<ListGroupedValuesIndex> exponentiationModuloDividersGroupedList;

List<BigInteger> log\_g\_NUM;

List<List<BigInteger>> SLAU;

List<Log\_g\_NUM\_result> log\_g\_NUM\_result;

List<BigInteger[,]> slauArrayResults;

BigInteger g;

BigInteger p;

BigInteger A;

bool numbersSwaped;

BigInteger H;

BigInteger J;

Random rnd;

public ModifiedCOS()

{

mathFunctions = new MathFunctions();

expNumber = new BigRational(2, 718, 1000); // 2.718

primeFactorBase = new FactorBase();

B = 0;

exponentiationModuloDividersGroupedList = new List<ListGroupedValuesIndex>();

log\_g\_NUM = new List<BigInteger>();

log\_g\_NUM\_result = new List<Log\_g\_NUM\_result>();

SLAU = new List<List<BigInteger>>();

slauArrayResults = new List<BigInteger[,]>();

numbersSwaped = false;

rnd = new Random();

}

public void CheckingTheInputValues(

string input\_g,

string input\_A,

string input\_p,

Label inputLabel,

ref bool theValuesAreCorrect,

out BigInteger g,

out BigInteger A,

out BigInteger p)

{

inputLabel.Text = "";

if (!BigInteger.TryParse(input\_g, out g) || g <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text = "Ошибка g";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_A, out A) || A <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка A";

};

if (!BigInteger.TryParse(input\_p, out p) || p <= 0)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text += "\nОшибка p";

};

}

public void CalculateCOS(BigInteger input\_g, BigInteger input\_A, BigInteger input\_p, Label inputLabel)

{

g = input\_g;

p = input\_p;

A = input\_A;

\_Step1();

\_Step2();

Step3();

BigInteger result = Step4();

inputLabel.Text = string.Format("Результат: \na = {0}", result);

}

public void CalculateCOS1(BigInteger input\_g, BigInteger input\_A, BigInteger input\_p, Label inputLabel)

{

g = input\_g;

p = input\_p;

A = input\_A;

Step1();

Step2();

Step3();

BigInteger result = Step4();

inputLabel.Text = string.Format("Результат: \na = {0}", result);

}

private void Step1()

{

H = (BigInteger)BigRational.Sqrt(p).FractionalPart + 1;

J = H \* H - p;

}

private void Step2()

{

BigInteger exponentiationModuloResult = 0;

List<BigInteger> exponentiationModuloList = new List<BigInteger>();

List<ListGroupedValues> exponentiationModuloDividersGrouped = new List<ListGroupedValues>();

bool isSmooth = true;

for (int c = 1; c < 10; c++)

{

exponentiationModuloList = mathFunctions.Factorization((H + rnd.Next(1, c)) \* (H + rnd.Next(1, c)) \* (H + rnd.Next(1, c)));

// повысил значение логарифмов (H + c), добавив занчение c3, чтобы увеличить разложение чисел для формирования СЛАУ

exponentiationModuloDividersGrouped = exponentiationModuloList

.GroupBy(x => x)

.Select(group => new ListGroupedValues(group.Key, group.Count(), BigInteger.Pow(group.Key, group.Count())))

.ToList();

for (int j = 0; j < exponentiationModuloDividersGrouped.Count; j++)

{

if (exponentiationModuloDividersGrouped[j].Key > B)

{

isSmooth = false;

break;

}

}

if (isSmooth)

{

ListGroupedValuesIndex listGroupedValuesIndex = new ListGroupedValuesIndex(c, exponentiationModuloDividersGrouped);

exponentiationModuloDividersGroupedList.Add(listGroupedValuesIndex);

}

isSmooth = true;

}

}

private void \_Step1()

{

BigInteger degree = BigRational.Sqrt(BigInteger.Log2(p) \* BigInteger.Log2(BigInteger.Log2(p))).WholePart;

B = (BigInteger)BigRational.Pow(expNumber, degree).FractionalPart;

}

private void \_Step2()

{

BigInteger exponentiationModuloResult = 0;

List<BigInteger> exponentiationModuloList = new List<BigInteger>();

List<ListGroupedValues> exponentiationModuloDividersGrouped = new List<ListGroupedValues>();

bool isSmooth = true;

for (int i = 4; i < B; i++)

{

exponentiationModuloResult = mathFunctions.ExponentiationModulo(g, i, p);

exponentiationModuloList = mathFunctions.Factorization(exponentiationModuloResult);

exponentiationModuloDividersGrouped = exponentiationModuloList

.GroupBy(x => x)

.Select(group => new ListGroupedValues(group.Key, group.Count(), BigInteger.Pow(group.Key, group.Count())))

.ToList();

for (int j = 0; j < exponentiationModuloDividersGrouped.Count; j++)

{

if (exponentiationModuloDividersGrouped[j].Key > B)

{

isSmooth = false;

break;

}

}

if (isSmooth)

{

ListGroupedValuesIndex listGroupedValuesIndex = new ListGroupedValuesIndex(i, exponentiationModuloDividersGrouped);

exponentiationModuloDividersGroupedList.Add(listGroupedValuesIndex);

}

isSmooth = true;

}

}

private void Step3()

{

CreateSLAU();

CalculateSLAU();

//PrintSLAU();

}

private BigInteger Step4()

{

List<BigInteger> exponentiationModuloList = new List<BigInteger>();

List<ListGroupedValues> exponentiationModuloDividersGrouped = new List<ListGroupedValues>();

BigInteger x;

bool isContains;

for (int i = 2; i < 100; i++)

{

x = 0;

exponentiationModuloList = mathFunctions.Factorization(mathFunctions.ExponentiationModulo(A \* BigInteger.Pow(g, i), 1, p));

exponentiationModuloDividersGrouped = exponentiationModuloList

.GroupBy(x => x)

.Select(group => new ListGroupedValues(group.Key, group.Count(), BigInteger.Pow(group.Key, group.Count())))

.ToList();

isContains = false;

foreach (var exponentiationModuloDivider in exponentiationModuloDividersGrouped)

{

foreach (var log\_g\_NUM\_element in log\_g\_NUM\_result)

{

if (exponentiationModuloDivider.Key == log\_g\_NUM[(int)log\_g\_NUM\_element.num])

{

isContains = true;

x += exponentiationModuloDivider.degree\_number \* log\_g\_NUM\_element.result;

break;

}

}

if (isContains == false)

{

break;

}

}

if (isContains == true)

{

x -= i;

if (x != 0 && mathFunctions.ExponentiationModulo(g, x, p) == A)

{

return x;

}

}

}

return 0;

}

private void CreateSLAU()

{

for (int i = 0; i < exponentiationModuloDividersGroupedList.Count; i++)

{

for (int j = 0; j < exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues.Count; j++)

{

log\_g\_NUM.Add(exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues[j].Key);

}

}

log\_g\_NUM.Sort();

log\_g\_NUM = log\_g\_NUM.Distinct().ToList();

// создание СЛАУ

int rowSLAUindex;

for (int i = 0; i < exponentiationModuloDividersGroupedList.Count; i++)

{

List<BigInteger> rowSLAU = new List<BigInteger>();

for (int j = 0; j < log\_g\_NUM.Count; j++)

{

rowSLAU.Add(0);

}

rowSLAU.Add(exponentiationModuloDividersGroupedList[i].index);

for (int j = 0; j < exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues.Count; j++)

{

rowSLAUindex = log\_g\_NUM.IndexOf(exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues[j].Key);

rowSLAU[rowSLAUindex] = exponentiationModuloDividersGroupedList[i].listGroupedValues[j].degree\_number;

}

SLAU.Add(rowSLAU);

}

//PrintSLAU();

}

private void CalculateSLAU()

{

for (int i = 0; i < SLAU.Count - 1; i++)

{

if (NonZeroValuesCount(SLAU[i]) > 2)

{

continue;

}

for (int j = i + 1; j < SLAU.Count; j++)

{

if (NonZeroValuesCount(SLAU[j]) > 2)

{

continue;

}

BigInteger[,] slauArray = new BigInteger[3, 3];

if (SlauMatrixCreated(slauArray, SLAU[i], SLAU[j]))

{

if (CalculateCreatedSlauMatrix(slauArray, i, j))

{

slauArrayResults.Add(slauArray);

}

numbersSwaped = false;

}

}

}

CreateLog\_g\_NUM\_result();

}

private void CreateLog\_g\_NUM\_result()

{

bool isСontainsList\_0\_0 = false;

bool isСontainsList\_0\_1 = false;

for (int i = 0; i < slauArrayResults.Count; i++)

{

for (int j = 0; j < log\_g\_NUM\_result.Count; j++)

{

if (log\_g\_NUM\_result[j].num == slauArrayResults[i][0, 0] && log\_g\_NUM\_result[j].result == slauArrayResults[i][1, 2])

{

isСontainsList\_0\_0 = true;

}

if (log\_g\_NUM\_result[j].num == slauArrayResults[i][0, 1] && log\_g\_NUM\_result[j].result == slauArrayResults[i][2, 2])

{

isСontainsList\_0\_1 = true;

}

}

if (isСontainsList\_0\_0 == false)

{

log\_g\_NUM\_result.Add(new Log\_g\_NUM\_result(slauArrayResults[i][0, 0], slauArrayResults[i][1, 2]));

}

if (isСontainsList\_0\_1 == false)

{

log\_g\_NUM\_result.Add(new Log\_g\_NUM\_result(slauArrayResults[i][0, 1], slauArrayResults[i][2, 2]));

}

isСontainsList\_0\_0 = false;

isСontainsList\_0\_1 = false;

}

log\_g\_NUM\_result = log\_g\_NUM\_result.OrderBy(x => x.num).ToList();

}

private int NonZeroValuesCount(List<BigInteger> slauRow)

{

int nonZeroValuesCount = 0;

for (int i = 0; i < slauRow.Count - 1; i++)

{

if (slauRow[i] != 0)

{

nonZeroValuesCount++;

}

}

return nonZeroValuesCount;

}

private bool SlauMatrixCreated(BigInteger[,] slauArray, List<BigInteger> slauRow\_i, List<BigInteger> slauRow\_j)

{

int slauArrayIndex\_i\_0 = -1;

int slauArrayIndex\_i\_1 = -1;

int slauArrayIndex\_j\_0 = -1;

int slauArrayIndex\_j\_1 = -1;

int slauRow\_i\_NonZeroValuesCount = NonZeroValuesCount(slauRow\_i);

int slauRow\_j\_NonZeroValuesCount = NonZeroValuesCount(slauRow\_j);

for (int q = 0; q < slauRow\_i.Count - 1; q++)

{

if (slauRow\_i[q] > 0)

{

if (slauArrayIndex\_i\_0 == -1)

{

slauArrayIndex\_i\_0 = q;

}

else

{

slauArrayIndex\_i\_1 = q;

}

}

if (slauRow\_j[q] > 0)

{

if (slauArrayIndex\_j\_0 == -1)

{

slauArrayIndex\_j\_0 = q;

}

else

{

slauArrayIndex\_j\_1 = q;

}

}

}

bool result = false;

if (slauArrayIndex\_i\_0 == slauArrayIndex\_j\_0

&& slauArrayIndex\_i\_1 == slauArrayIndex\_j\_1

&& slauArrayIndex\_i\_0 != -1 && slauArrayIndex\_i\_1 != -1)

{

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_0 == slauArrayIndex\_j\_0

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 2

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 1)

{

slauArrayIndex\_j\_1 = slauArrayIndex\_i\_1;

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_1 == slauArrayIndex\_j\_1

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 2

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 1)

{

slauArrayIndex\_j\_0 = slauArrayIndex\_i\_0;

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_0 == slauArrayIndex\_j\_0

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 1

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 2)

{

slauArrayIndex\_i\_1 = slauArrayIndex\_j\_1;

result = true;

}

else if (slauArrayIndex\_i\_1 == slauArrayIndex\_j\_1

&& slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 1

&& slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 2)

{

slauArrayIndex\_i\_0 = slauArrayIndex\_j\_0;

result = true;

}

if (result)

{

slauArray[0, 0] = slauArrayIndex\_i\_0;

slauArray[0, 1] = slauArrayIndex\_i\_1;

slauArray[1, 0] = slauRow\_i[slauArrayIndex\_i\_0];

slauArray[1, 1] = slauRow\_i[slauArrayIndex\_i\_1];

slauArray[1, 2] = slauRow\_i[slauRow\_i.Count - 1];

slauArray[2, 0] = slauRow\_j[slauArrayIndex\_j\_0];

slauArray[2, 1] = slauRow\_j[slauArrayIndex\_j\_1];

slauArray[2, 2] = slauRow\_j[slauRow\_j.Count - 1];

BigInteger swapNumber;

if (slauRow\_j\_NonZeroValuesCount == 1 && slauArray[2, 1] == 0

|| slauRow\_i\_NonZeroValuesCount == 1 && slauArray[1, 0] == 0)

{

for (int i = 0; i < 3; i++)

{

swapNumber = slauArray[1, i];

slauArray[1, i] = slauArray[2, i];

slauArray[2, i] = swapNumber;

}

numbersSwaped = true;

}

//PrintSlauArray(slauArray);

}

return result;

}

private bool CalculateCreatedSlauMatrix(BigInteger[,] slauArray, int i, int j)

{

BigInteger invertibleNumberModulo;

BigInteger[] multipliersModulo\_x\_y;

BigInteger p\_1 = p - 1;

if (slauArray[1, 1] != 0)

{

multipliersModulo\_x\_y = mathFunctions.FindMultipliersModulo\_x\_y(slauArray[1, 1], slauArray[2, 1], p\_1, 0);

if (multipliersModulo\_x\_y[0] == 0 && multipliersModulo\_x\_y[1] == 0)

{

return false;

}

slauArray[1, 0] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 0] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 0] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

slauArray[1, 1] = 0;

slauArray[1, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

}

if (slauArray[1, 0] != 1)

{

invertibleNumberModulo = mathFunctions.FindInvertibleNumberModulo(slauArray[1, 0], p\_1);

if (invertibleNumberModulo == -1)

{

return false;

}

slauArray[1, 0] = 1;

slauArray[1, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 2] \* invertibleNumberModulo, 1, p\_1);

}

if (slauArray[2, 0] != 0)

{

multipliersModulo\_x\_y = mathFunctions.FindMultipliersModulo\_x\_y(slauArray[1, 0], slauArray[2, 0], p\_1, 0);

if (multipliersModulo\_x\_y[0] == 0 && multipliersModulo\_x\_y[1] == 0)

{

return false;

}

slauArray[2, 0] = 0;

slauArray[2, 1] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 1] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 1] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

slauArray[2, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[1, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[0] + slauArray[2, 2] \* multipliersModulo\_x\_y[1], 1, p\_1);

}

if (slauArray[2, 1] != 0)

{

invertibleNumberModulo = mathFunctions.FindInvertibleNumberModulo(slauArray[2, 1], p\_1);

if (invertibleNumberModulo == -1)

{

return false;

}

slauArray[2, 1] = 1;

slauArray[2, 2] = mathFunctions.ExponentiationModulo(slauArray[2, 2] \* invertibleNumberModulo, 1, p\_1);

}

if (numbersSwaped)

{

int swapNumber;

swapNumber = i;

i = j;

j = swapNumber;

}

SLAU[i][(int)slauArray[0, 0]] = slauArray[1, 0];

SLAU[i][(int)slauArray[0, 1]] = slauArray[1, 1];

SLAU[i][SLAU[i].Count - 1] = slauArray[1, 2];

SLAU[j][(int)slauArray[0, 0]] = slauArray[2, 0];

SLAU[j][(int)slauArray[0, 1]] = slauArray[2, 1];

SLAU[j][SLAU[j].Count - 1] = slauArray[2, 2];

//PrintSlauArray(slauArray, "Преобразованная СЛАУ");

return true;

}

private void PrintSlauArray(BigInteger[,] slauArray, string inputText = "")

{

Console.WriteLine(inputText);

for (int i = 0; i < 3; i++)

{

for (int j = 0; j < 3; j++)

{

Console.Write(string.Format("{0} ", slauArray[i, j]));

}

Console.WriteLine();

}

}

private void PrintSLAU()

{

for (int i = 0; i < log\_g\_NUM.Count; i++)

{

Console.Write(string.Format("{0} ", log\_g\_NUM[i]));

}

Console.WriteLine();

for (int i = 0; i < SLAU.Count; i++)

{

for (int j = 0; j < SLAU[0].Count; j++)

{

Console.Write(string.Format("{0} ", SLAU[i][j]));

}

Console.WriteLine();

}

}

}

}

# Приложение 6. Модифицированный алгоритм решето числового поля

using DiscreteLogarithm.MathFunctionsForCalculation;

using ExtendedArithmetic;

using ExtendedNumerics;

using System.Management;

using System.Numerics;

using System.Runtime.Serialization;

using System.Text;

using Label = System.Windows.Forms.Label;

namespace DiscreteLogarithm.SubExponentialAlgorithms

{

public class GNFS

{

public BigInteger N;

public Solution Factorization { get; private set; }

public int PolynomialDegree { get; internal set; }

public BigInteger PolynomialBase { get; private set; }

public Polynomial CurrentPolynomial { get; internal set; }

public PolyRelationsSieveProgress CurrentRelationsProgress { get; set; }

public FactorBase PrimeFactorBase { get; set; }

public List<Polynomial> PolynomialCollection { get; set; }

public FactorPairCollection QuadraticFactorPairCollection { get; set; }

int relationQuantity { get; set; }

int relationValueRange { get; set; }

/// <summary>

/// Array of (p, m % p)

/// </summary>

public FactorPairCollection RationalFactorPairCollection { get; set; }

/// <summary>

/// Array of (p, r) where ƒ(r) % p == 0

/// </summary>

public FactorPairCollection AlgebraicFactorPairCollection { get; set; }

public void CheckingTheInputValues(

string input\_N,

Label inputLabel,

ref bool theValuesAreCorrect,

out BigInteger a)

{

inputLabel.Text = "";

if (!BigInteger.TryParse(input\_N, out a) || a < 5)

{

theValuesAreCorrect = false;

inputLabel.Text = "Ошибка N";

};

}

public void CalculateGNFS(BigInteger N, Label inputLabel)

{

Step1(N);

Step2();

Step3();

Step4();

BigInteger p = this.Factorization.P;

BigInteger q = this.Factorization.Q;

inputLabel.Text = string.Format("P = {0} \nQ = {1}", p, q);

}

private void Step1(BigInteger N) // Create Polynomial, Factor Bases && Roots

{

PolynomialBase = 31;

PolynomialDegree = 3;

relationQuantity = 65;

relationValueRange = 1000;

PrimeFactorBase = new FactorBase();

PolynomialCollection = new List<Polynomial>();

RationalFactorPairCollection = new FactorPairCollection();

AlgebraicFactorPairCollection = new FactorPairCollection();

QuadraticFactorPairCollection = new FactorPairCollection();

CurrentPolynomial = new Polynomial(N, PolynomialBase, PolynomialDegree);

CaclulatePrimeFactorBaseBounds(50);

SetPrimeFactorBases();

NewFactorPairCollections();

CurrentRelationsProgress = new PolyRelationsSieveProgress(this, relationQuantity, relationValueRange);

this.N = N;

}

private void Step2() // Sieve Relations

{

this.CurrentRelationsProgress.GenerateRelations();

}

private void Step3() // Matrix

{

MatrixSolve.GaussianSolve(this);

}

private void Step4() // Square Root Solve

{

SquareFinder.Solve(this);

}

public void CaclulatePrimeFactorBaseBounds(BigInteger bound)

{

PrimeFactorBase = new FactorBase();

PrimeFactorBase.RationalFactorBaseMax = bound;

PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBaseMax = (PrimeFactorBase.RationalFactorBaseMax) \* 3;

PrimeFactorBase.QuadraticBaseCount = CalculateQuadraticBaseSize(PolynomialDegree);

PrimeFactorBase.QuadraticFactorBaseMin = PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBaseMax + 20;

PrimeFactorBase.QuadraticFactorBaseMax = PrimeFactory.GetApproximateValueFromIndex((UInt64)(PrimeFactorBase.QuadraticFactorBaseMin + PrimeFactorBase.QuadraticBaseCount));

}

private static int CalculateQuadraticBaseSize(int polyDegree)

{

int result = -1;

if (polyDegree <= 3)

{

result = 10;

}

else if (polyDegree == 4)

{

result = 20;

}

else if (polyDegree == 5 || polyDegree == 6)

{

result = 40;

}

else if (polyDegree == 7)

{

result = 80;

}

else if (polyDegree >= 8)

{

result = 100;

}

return result;

}

public void SetPrimeFactorBases()

{

PrimeFactory.IncreaseMaxValue(PrimeFactorBase.QuadraticFactorBaseMax);

PrimeFactorBase.RationalFactorBase = PrimeFactory.GetPrimesTo(PrimeFactorBase.RationalFactorBaseMax);

PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBase = PrimeFactory.GetPrimesTo(PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBaseMax);

PrimeFactorBase.QuadraticFactorBase = PrimeFactory.GetPrimesFrom(PrimeFactorBase.QuadraticFactorBaseMin).Take(PrimeFactorBase.QuadraticBaseCount);

}

private void NewFactorPairCollections()

{

if (!RationalFactorPairCollection.Any())

{

RationalFactorPairCollection = FactorPairCollection.Factory.BuildRationalFactorPairCollection(this);

}

if (!AlgebraicFactorPairCollection.Any())

{

AlgebraicFactorPairCollection = FactorPairCollection.Factory.BuildAlgebraicFactorPairCollection(this);

}

if (!QuadraticFactorPairCollection.Any())

{

QuadraticFactorPairCollection = FactorPairCollection.Factory.BuildQuadraticFactorPairCollection(this);

}

}

public bool SetFactorizationSolution(BigInteger p, BigInteger q)

{

BigInteger n = p \* q;

if (n == this.N)

{

Factorization = new Solution(p, q);

return true;

}

return false;

}

}

public class PolyRelationsSieveProgress

{

MathFunctions mathFunctions;

public BigInteger A { get; private set; }

public BigInteger B { get; private set; }

public int SmoothRelations\_TargetQuantity { get; private set; }

public BigInteger ValueRange { get; private set; }

public List<List<Relation>> FreeRelations { get { return Relations.FreeRelations; } }

public List<Relation> SmoothRelations { get { return Relations.SmoothRelations; } }

public List<Relation> RoughRelations { get { return Relations.RoughRelations; } }

public RelationContainer Relations { get; set; }

public BigInteger MaxB { get; set; }

public int SmoothRelationsCounter { get; set; }

public int FreeRelationsCounter { get; set; }

public int SmoothRelationsRequiredForMatrixStep

{

get

{

return PrimeFactory.GetIndexFromValue(\_gnfs.PrimeFactorBase.RationalFactorBaseMax)

+ PrimeFactory.GetIndexFromValue(\_gnfs.PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBaseMax)

+ \_gnfs.QuadraticFactorPairCollection.Count + 3;

}

}

internal GNFS \_gnfs;

public PolyRelationsSieveProgress(GNFS gnfs, int smoothRelationsTargetQuantity, BigInteger valueRange)

{

mathFunctions = new MathFunctions();

\_gnfs = gnfs;

Relations = new RelationContainer();

A = 0;

B = 3;

ValueRange = valueRange;

if (smoothRelationsTargetQuantity == -1)

{

SmoothRelations\_TargetQuantity = SmoothRelationsRequiredForMatrixStep;

}

else

{

SmoothRelations\_TargetQuantity = Math.Max(smoothRelationsTargetQuantity, SmoothRelationsRequiredForMatrixStep);

}

if (MaxB == 0)

{

MaxB = (uint)gnfs.PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBaseMax;

}

}

public void GenerateRelations()

{

SmoothRelations\_TargetQuantity = Math.Max(SmoothRelations\_TargetQuantity, SmoothRelationsRequiredForMatrixStep); ;

if (A >= ValueRange)

{

ValueRange += 200;

}

ValueRange = (ValueRange % 2 == 0) ? ValueRange + 1 : ValueRange;

A = (A % 2 == 0) ? A + 1 : A;

BigInteger startA = A;

while (B >= MaxB)

{

MaxB += 100;

}

while (SmoothRelationsCounter < SmoothRelations\_TargetQuantity)

{

if (B > MaxB)

{

break;

}

foreach (BigInteger a in SieveRange.GetSieveRangeContinuation(A, ValueRange))

{

A = a;

if (BigInteger.GreatestCommonDivisor(A, B) == 1)

{

Relation rel = new Relation(\_gnfs, A, B);

rel.Sieve(\_gnfs.CurrentRelationsProgress);

bool smooth = rel.IsSmooth;

if (smooth)

{

Serialization.Save.Relations.Smooth.Append(\_gnfs, rel);

\_gnfs.CurrentRelationsProgress.Relations.SmoothRelations.Add(rel);

}

else

{

}

}

}

B += 1;

A = startA;

}

}

public void IncreaseTargetQuantity()

{

IncreaseTargetQuantity(SmoothRelations\_TargetQuantity - SmoothRelationsRequiredForMatrixStep);

}

public void IncreaseTargetQuantity(int ammount)

{

SmoothRelations\_TargetQuantity += ammount;

}

public void PurgePrimeRoughRelations()

{

List<Relation> roughRelations = Relations.RoughRelations.ToList();

IEnumerable<Relation> toRemoveAlg = roughRelations

.Where(r => r.AlgebraicQuotient != 1 && mathFunctions.TestMillerRabin(r.AlgebraicQuotient) == "Вероятно простое");

roughRelations = roughRelations.Except(toRemoveAlg).ToList();

Relations.RoughRelations = roughRelations;

IEnumerable<Relation> toRemoveRational = roughRelations

.Where(r => r.RationalQuotient != 1 && mathFunctions.TestMillerRabin(r.AlgebraicQuotient) == "Вероятно простое");

roughRelations = roughRelations.Except(toRemoveRational).ToList();

Relations.RoughRelations = roughRelations;

}

public void AddFreeRelationSolution(List<Relation> freeRelationSolution)

{

Relations.FreeRelations.Add(freeRelationSolution);

}

}

public static class SieveRange

{

public static IEnumerable<BigInteger> GetSieveRangeContinuation(BigInteger currentValue, BigInteger maximumRange)

{

BigInteger max = maximumRange;

BigInteger counter = BigInteger.Abs(currentValue);

bool flipFlop = !(currentValue.Sign == -1);

while (counter <= max)

{

if (flipFlop)

{

yield return counter;

flipFlop = false;

}

else if (!flipFlop)

{

yield return -counter;

counter++;

flipFlop = true;

}

}

}

}

public class Relation

{

public BigInteger A { get; protected set; }

/// <summary>

/// Root of f(x) in algebraic field

/// </summary>

public BigInteger B { get; protected set; }

/// <summary> ƒ(b) ≡ 0 (mod a); Calculated as: ƒ(-a/b) \* -b^deg </summary>

public BigInteger AlgebraicNorm { get; protected set; }

/// <summary> a + bm </summary>

public BigInteger RationalNorm { get; protected set; }

internal BigInteger AlgebraicQuotient;

internal BigInteger RationalQuotient;

public CountDictionary AlgebraicFactorization { get; private set; }

public CountDictionary RationalFactorization { get; private set; }

public bool IsSmooth { get { return (IsRationalQuotientSmooth && IsAlgebraicQuotientSmooth); } }

public bool IsRationalQuotientSmooth { get { return (RationalQuotient == 1 || RationalQuotient == 0); } }

public bool IsAlgebraicQuotientSmooth { get { return (AlgebraicQuotient == 1 || AlgebraicQuotient == 0); } }

public bool IsPersisted { get; set; }

public Relation()

{

IsPersisted = false;

RationalFactorization = new CountDictionary();

AlgebraicFactorization = new CountDictionary();

}

public Relation(GNFS gnfs, BigInteger a, BigInteger b)

: this()

{

A = a;

B = b;

AlgebraicNorm = Normal.Algebraic(A, B, gnfs.CurrentPolynomial); // b^deg \* f( a/b )

RationalNorm = Normal.Rational(A, B, gnfs.PolynomialBase); // a + bm

AlgebraicQuotient = BigInteger.Abs(AlgebraicNorm);

RationalQuotient = BigInteger.Abs(RationalNorm);

if (AlgebraicNorm.Sign == -1)

{

AlgebraicFactorization.Add(BigInteger.MinusOne);

}

if (RationalNorm.Sign == -1)

{

RationalFactorization.Add(BigInteger.MinusOne);

}

}

public void Sieve(PolyRelationsSieveProgress relationsSieve)

{

Sieve(relationsSieve.\_gnfs.PrimeFactorBase.RationalFactorBase, ref RationalQuotient, RationalFactorization);

if (IsRationalQuotientSmooth) // No sense wasting time on factoring the AlgebraicQuotient if the relation is ultimately going to be rejected anyways.

{

Sieve(relationsSieve.\_gnfs.PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBase, ref AlgebraicQuotient, AlgebraicFactorization);

}

}

private static void Sieve(IEnumerable<BigInteger> primeFactors, ref BigInteger quotientValue, CountDictionary dictionary)

{

if (quotientValue.Sign == -1 || primeFactors.Any(f => f.Sign == -1))

{

throw new Exception("There shouldn't be any negative values either in the quotient or the factors");

}

foreach (BigInteger factor in primeFactors)

{

if (quotientValue == 1)

{

return;

}

if ((factor \* factor) > quotientValue)

{

if (primeFactors.Contains(quotientValue))

{

dictionary.Add(quotientValue);

quotientValue = 1;

}

return;

}

while (quotientValue != 1 && quotientValue % factor == 0)

{

dictionary.Add(factor);

quotientValue = BigInteger.Divide(quotientValue, factor);

}

}

}

}

public class FactorBase

{

public FactorBase()

{

RationalFactorBase = new List<BigInteger>();

AlgebraicFactorBase = new List<BigInteger>();

QuadraticFactorBase = new List<BigInteger>();

}

public BigInteger RationalFactorBaseMax { get; internal set; }

public BigInteger AlgebraicFactorBaseMax { get; internal set; }

public BigInteger QuadraticFactorBaseMin { get; internal set; }

public BigInteger QuadraticFactorBaseMax { get; internal set; }

public int QuadraticBaseCount { get; internal set; }

public IEnumerable<BigInteger> RationalFactorBase { get; internal set; }

public IEnumerable<BigInteger> AlgebraicFactorBase { get; internal set; }

public IEnumerable<BigInteger> QuadraticFactorBase { get; internal set; }

}

public class RelationContainer

{

public List<Relation> SmoothRelations { get; internal set; }

public List<Relation> RoughRelations { get; internal set; }

public List<List<Relation>> FreeRelations { get; internal set; }

public RelationContainer()

{

SmoothRelations = new List<Relation>();

RoughRelations = new List<Relation>();

FreeRelations = new List<List<Relation>>();

}

}

public class CountDictionary : SortedDictionary<BigInteger, BigInteger>

{

public CountDictionary()

: base(Comparer<BigInteger>.Create(BigInteger.Compare))

{

}

public void Add(BigInteger key)

{

this.AddSafe(key, 1);

}

private void AddSafe(BigInteger key, BigInteger value)

{

if (!ContainsKey(key)) { this.Add(key, value); }

else { this[key] += value; }

}

public void Combine(CountDictionary dictionary)

{

foreach (var kvp in dictionary)

{

AddSafe(kvp.Key, kvp.Value);

}

}

#region String Formatting

public string FormatStringAsFactorization()

{

//Order();

StringBuilder result = new StringBuilder();

result.Append(

" -> {\t" +

string.Join(" \* ", this.Select(kvp => $"{kvp.Key}^{kvp.Value}")) +

"\t};"

);

return result.ToString();

}

#endregion

}

public static class Normal

{

/// <summary>

/// a + bm

/// </summary>

/// <param name="polynomialBase">Base m of f(m) = N</param>

/// <returns></returns>

public static BigInteger Rational(BigInteger a, BigInteger b, BigInteger polynomialBase)

{

return BigInteger.Add(a, BigInteger.Multiply(b, polynomialBase));

}

/// <summary>

/// ƒ(b) ≡ 0 (mod a)

///

/// Calculated as:

/// ƒ(-a/b) \* -b^deg

/// </summary>

/// <param name="a">Divisor in the equation ƒ(b) ≡ 0 (mod a)</param>

/// <param name="b">A root of f(x)</param>

/// <param name="poly">Base m of f(m) = N</param>

/// <returns></returns>

public static BigInteger Algebraic(BigInteger a, BigInteger b, Polynomial poly)

{

BigRational aD = (BigRational)a;

BigRational bD = (BigRational)b;

BigRational ab = BigRational.Negate(aD) / bD;

BigRational left = PolynomialEvaluate\_BigRational(poly, ab);

BigInteger right = BigInteger.Pow(BigInteger.Negate(b), poly.Degree);

BigRational product = right \* left;

Fraction fractionalPart = product.FractionalPart;

BigInteger result = product.WholePart;

return result;

}

private static BigRational PolynomialEvaluate\_BigRational(Polynomial polynomial, BigRational indeterminateValue)

{

int num = polynomial.Degree;

BigRational result = (BigRational)polynomial[num];

while (--num >= 0)

{

result \*= indeterminateValue;

result += (BigRational)polynomial[num];

}

return result;

}

}

public static class PrimeFactory

{

private static MathFunctions mathFunctions;

private static BigInteger MaxValue = 10;

private static int primesCount;

private static BigInteger primesLast;

private static List<BigInteger> primes = new List<BigInteger>() { 2, 3, 5, 7, 11, 13 };

static PrimeFactory()

{

SetPrimes();

mathFunctions = new MathFunctions();

}

private static void SetPrimes()

{

primes = FastPrimeSieve.GetRange(2, (Int32)MaxValue).ToList();

primesCount = primes.Count;

primesLast = primes.Last();

}

public static IEnumerable<BigInteger> GetPrimeEnumerator(int startIndex = 0, int stopIndex = -1)

{

int index = startIndex;

int maxIndex = stopIndex > 0 ? stopIndex : primesCount - 1;

while (index < maxIndex)

{

yield return primes[index];

index++;

}

yield break;

}

public static void IncreaseMaxValue(BigInteger newMaxValue)

{

// Increase bound

BigInteger temp = BigInteger.Max(newMaxValue + 1000, MaxValue + 100000 /\*MaxValue\*/);

MaxValue = BigInteger.Min(temp, (Int32.MaxValue - 1));

SetPrimes();

}

public static int GetIndexFromValue(BigInteger value)

{

if (value == -1)

{

return -1;

}

if (primesLast < value)

{

IncreaseMaxValue(value);

}

BigInteger primeValue = primes.First(p => p >= value);

int index = primes.IndexOf(primeValue) + 1;

return index;

}

public static BigInteger GetApproximateValueFromIndex(UInt64 n)

{

if (n < 6)

{

return primes[(int)n];

}

double fn = (double)n;

double flogn = Math.Log(n);

double flog2n = Math.Log(flogn);

double upper;

if (n >= 688383) /\* Dusart 2010 page 2 \*/

{

upper = fn \* (flogn + flog2n - 1.0 + ((flog2n - 2.00) / flogn));

}

else if (n >= 178974) /\* Dusart 2010 page 7 \*/

{

upper = fn \* (flogn + flog2n - 1.0 + ((flog2n - 1.95) / flogn));

}

else if (n >= 39017) /\* Dusart 1999 page 14 \*/

{

upper = fn \* (flogn + flog2n - 0.9484);

}

else /\* Modified from Robin 1983 for 6-39016 \_only\_ \*/

{

upper = fn \* (flogn + 0.6000 \* flog2n);

}

if (upper >= (double)UInt64.MaxValue)

{

throw new OverflowException($"{upper} > {UInt64.MaxValue}");

}

return new BigInteger((UInt64)Math.Ceiling(upper));

}

public static IEnumerable<BigInteger> GetPrimesFrom(BigInteger minValue)

{

return GetPrimeEnumerator(GetIndexFromValue(minValue));

}

public static IEnumerable<BigInteger> GetPrimesTo(BigInteger maxValue)

{

if (primesLast < maxValue)

{

IncreaseMaxValue(maxValue);

}

return GetPrimeEnumerator(0).TakeWhile(p => p < maxValue);

}

public static BigInteger GetNextPrime(BigInteger fromValue)

{

BigInteger result = fromValue + 1;

if (result.IsEven)

{

result += 1;

}

while (mathFunctions.TestMillerRabin(result) != "Вероятно простое")

{

result += 2;

}

return result;

}

}

public class FactorPairCollection : List<FactorPair>

{

public FactorPairCollection()

: base()

{

}

public FactorPairCollection(IEnumerable<FactorPair> collection)

: base(collection)

{

}

public static class Factory

{

// array of (p, m % p) up to bound

// quantity = phi(bound)

public static FactorPairCollection BuildRationalFactorPairCollection(GNFS gnfs)

{

IEnumerable<FactorPair> result = gnfs.PrimeFactorBase.RationalFactorBase.Select(p => new FactorPair(p, (gnfs.PolynomialBase % p))).Distinct();

return new FactorPairCollection(result);

}

// array of (p, r) where ƒ(r) % p == 0

// quantity = 2-3 times RFB.quantity

public static FactorPairCollection BuildAlgebraicFactorPairCollection(GNFS gnfs)

{

return new FactorPairCollection(FindPolynomialRootsInRange(gnfs.CurrentPolynomial, gnfs.PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBase, 0, gnfs.PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBaseMax, 2000));

}

// array of (p, r) where ƒ(r) % p == 0

// quantity =< 100

// magnitude p > AFB.Last().p

public static FactorPairCollection BuildQuadraticFactorPairCollection(GNFS gnfs)

{

return new FactorPairCollection(FindPolynomialRootsInRange(gnfs.CurrentPolynomial, gnfs.PrimeFactorBase.QuadraticFactorBase, 2, gnfs.PrimeFactorBase.QuadraticFactorBaseMax, gnfs.PrimeFactorBase.QuadraticBaseCount));

}

}

public static List<FactorPair> FindPolynomialRootsInRange(Polynomial polynomial, IEnumerable<BigInteger> primes, BigInteger rangeFrom, BigInteger rangeTo, int totalFactorPairs)

{

List<FactorPair> result = new List<FactorPair>();

BigInteger r = rangeFrom;

IEnumerable<BigInteger> modList = primes.AsEnumerable();

while (r < rangeTo && result.Count < totalFactorPairs)

{

// Finds p such that ƒ(r) ≡ 0 (mod p)

List<BigInteger> roots = GetRootsMod(polynomial, r, modList);

if (roots.Any())

{

result.AddRange(roots.Select(p => new FactorPair(p, r)));

}

r++;

}

return result.OrderBy(tup => tup.P).ToList();

}

/// <summary>

/// Given a list of primes, returns primes p such that ƒ(r) ≡ 0 (mod p)

/// </summary>

public static List<BigInteger> GetRootsMod(Polynomial polynomial, BigInteger baseM, IEnumerable<BigInteger> modList)

{

BigInteger polyResult = polynomial.Evaluate(baseM);

IEnumerable<BigInteger> result = modList.Where(mod => (polyResult % mod) == 0);

return result.ToList();

}

}

public struct FactorPair

{

public int P { get; private set; }

public int R { get; private set; }

public FactorPair(BigInteger p, BigInteger r)

{

P = (int)p;

R = (int)r;

}

}

public class FastPrimeSieve

{

private static readonly uint PageSize; // L1 CPU cache size in bytes

private static readonly uint BufferBits;

private static readonly uint BufferBitsNext;

static FastPrimeSieve()

{

uint cacheSize = 393216;

List<uint> cacheSizes = CPUInfo.GetCacheSizes(CPUInfo.CacheLevel.Level1);

if (cacheSizes.Any())

{

cacheSize = cacheSizes.First() \* 1024;

}

PageSize = cacheSize; // L1 CPU cache size in bytes

BufferBits = PageSize \* 8; // in bits

BufferBitsNext = BufferBits \* 2;

}

public static IEnumerable<BigInteger> GetRange(BigInteger floor, BigInteger ceiling)

{

FastPrimeSieve primesPaged = new FastPrimeSieve();

IEnumerator<BigInteger> enumerator = primesPaged.GetEnumerator();

while (enumerator.MoveNext())

{

if (enumerator.Current >= floor)

{

break;

}

}

do

{

if (enumerator.Current > ceiling)

{

break;

}

yield return enumerator.Current;

}

while (enumerator.MoveNext());

yield break;

}

public IEnumerator<BigInteger> GetEnumerator()

{

return Iterator();

}

private static IEnumerator<BigInteger> Iterator()

{

IEnumerator<BigInteger> basePrimes = null;

List<uint> basePrimesArray = new List<uint>();

uint[] cullBuffer = new uint[PageSize / 4]; // 4 byte words

yield return 2;

for (var low = (BigInteger)0; ; low += BufferBits)

{

for (var bottomItem = 0; ; ++bottomItem)

{

if (bottomItem < 1)

{

if (bottomItem < 0)

{

bottomItem = 0;

yield return 2;

}

BigInteger next = 3 + low + low + BufferBitsNext;

if (low <= 0)

{

// cull very first page

for (int i = 0, sqr = 9, p = 3; sqr < next; i++, p += 2, sqr = p \* p)

{

if ((cullBuffer[i >> 5] & (1 << (i & 31))) == 0)

{

for (int j = (sqr - 3) >> 1; j < BufferBits; j += p)

{

cullBuffer[j >> 5] |= 1u << j;

}

}

}

}

else

{

// Cull for the rest of the pages

Array.Clear(cullBuffer, 0, cullBuffer.Length);

if (basePrimesArray.Count == 0)

{

// Init second base primes stream

basePrimes = Iterator();

basePrimes.MoveNext();

basePrimes.MoveNext();

basePrimesArray.Add((uint)basePrimes.Current); // Add 3 to base primes array

basePrimes.MoveNext();

}

// Make sure basePrimesArray contains enough base primes...

for (BigInteger p = basePrimesArray[basePrimesArray.Count - 1], square = p \* p; square < next;)

{

p = basePrimes.Current;

basePrimes.MoveNext();

square = p \* p;

basePrimesArray.Add((uint)p);

}

for (int i = 0, limit = basePrimesArray.Count - 1; i < limit; i++)

{

var p = (BigInteger)basePrimesArray[i];

var start = (p \* p - 3) >> 1;

// adjust start index based on page lower limit...

if (start >= low)

{

start -= low;

}

else

{

var r = (low - start) % p;

start = (r != 0) ? p - r : 0;

}

for (var j = (uint)start; j < BufferBits; j += (uint)p)

{

cullBuffer[j >> 5] |= 1u << ((int)j);

}

}

}

}

while (bottomItem < BufferBits && (cullBuffer[bottomItem >> 5] & (1 << (bottomItem & 31))) != 0)

{

++bottomItem;

}

if (bottomItem < BufferBits)

{

var result = 3 + (((BigInteger)bottomItem + low) << 1);

yield return result;

}

else break; // outer loop for next page segment...

}

}

}

}

public static class CPUInfo

{

public static List<uint> GetCacheSizes(CacheLevel level)

{

ManagementClass mc = new ManagementClass("Win32\_CacheMemory");

ManagementObjectCollection moc = mc.GetInstances();

List<uint> cacheSizes = new List<uint>(moc.Count);

cacheSizes.AddRange(moc

.Cast<ManagementObject>()

.Where(p => (ushort)(p.Properties["Level"].Value) == (ushort)level)

.Select(p => (uint)(p.Properties["MaxCacheSize"].Value)));

return cacheSizes;

}

public enum CacheLevel : ushort

{

Level1 = 3,

Level2 = 4,

Level3 = 5,

}

}

public static partial class Serialization

{

public static class Save

{

public static class Relations

{

public static class Smooth

{

public static void Append(GNFS gnfs)

{

if (gnfs.CurrentRelationsProgress.Relations.SmoothRelations.Any())

{

List<Relation> toSave = gnfs.CurrentRelationsProgress.Relations.SmoothRelations.Where(rel => !rel.IsPersisted).ToList();

foreach (Relation rel in toSave)

{

Append(gnfs, rel);

}

}

}

public static void Append(GNFS gnfs, Relation relation)

{

if (relation != null && relation.IsSmooth && !relation.IsPersisted)

{

gnfs.CurrentRelationsProgress.SmoothRelationsCounter += 1;

relation.IsPersisted = true;

}

}

}

}

}

}

public static class MatrixSolve

{

public static void GaussianSolve(GNFS gnfs)

{

Serialization.Save.Relations.Smooth.Append(gnfs); // Persist any relations not already persisted to disk

List<Relation> smoothRelations = gnfs.CurrentRelationsProgress.SmoothRelations.ToList();

int smoothCount = smoothRelations.Count;

BigInteger requiredRelationsCount = gnfs.CurrentRelationsProgress.SmoothRelationsRequiredForMatrixStep;

while (smoothRelations.Count >= requiredRelationsCount)

{

// Randomly select n relations from smoothRelations

List<Relation> selectedRelations = new List<Relation>();

while (

selectedRelations.Count < requiredRelationsCount

||

selectedRelations.Count % 2 != 0 // Force number of relations to be even

)

{

int randomIndex = StaticRandom.Next(0, smoothRelations.Count);

selectedRelations.Add(smoothRelations[randomIndex]);

smoothRelations.RemoveAt(randomIndex);

}

GaussianMatrix gaussianReduction = new GaussianMatrix(gnfs, selectedRelations);

gaussianReduction.TransposeAppend();

gaussianReduction.Elimination();

int number = 1;

int solutionCount = gaussianReduction.FreeVariables.Count(b => b) - 1;

List<List<Relation>> solution = new List<List<Relation>>();

while (number <= solutionCount)

{

List<Relation> relations = gaussianReduction.GetSolutionSet(number);

number++;

BigInteger algebraic = relations.Select(rel => rel.AlgebraicNorm).Product();

BigInteger rational = relations.Select(rel => rel.RationalNorm).Product();

CountDictionary algCountDict = new CountDictionary();

foreach (var rel in relations)

{

algCountDict.Combine(rel.AlgebraicFactorization);

}

bool isAlgebraicSquare = algebraic.IsSquare();

bool isRationalSquare = rational.IsSquare();

if (isAlgebraicSquare && isRationalSquare)

{

solution.Add(relations);

gnfs.CurrentRelationsProgress.AddFreeRelationSolution(relations);

}

}

}

}

}

public static class StaticRandom

{

private static readonly Random rand = new Random();

static StaticRandom()

{

int counter = rand.Next(100, 200);

while (counter-- > 0)

{

rand.Next();

}

}

public static int Next(int minValue, int maxValue)

{

return rand.Next(minValue, maxValue);

}

}

public class GaussianMatrix

{

public List<bool[]> Matrix { get { return M; } }

public bool[] FreeVariables { get { return freeCols; } }

public int RowCount { get { return M.Count; } }

public int ColumnCount { get { return M.Any() ? M.First().Length : 0; } }

private List<bool[]> M;

private bool[] freeCols;

private bool eliminationStep;

private GNFS \_gnfs;

private List<Relation> relations;

public Dictionary<int, Relation> ColumnIndexRelationDictionary;

private List<Tuple<Relation, bool[]>> relationMatrixTuple;

public GaussianMatrix(GNFS gnfs, List<Relation> rels)

{

\_gnfs = gnfs;

relationMatrixTuple = new List<Tuple<Relation, bool[]>>();

eliminationStep = false;

freeCols = new bool[0];

M = new List<bool[]>();

relations = rels;

List<GaussianRow> relationsAsRows = new List<GaussianRow>();

foreach (Relation rel in relations)

{

GaussianRow row = new GaussianRow(\_gnfs, rel);

relationsAsRows.Add(row);

}

//List<GaussianRow> orderedRows = relationsAsRows.OrderBy(row1 => row1.LastIndexOfAlgebraic).ThenBy(row2 => row2.LastIndexOfQuadratic).ToList();

List<GaussianRow> selectedRows = relationsAsRows.Take(\_gnfs.CurrentRelationsProgress.SmoothRelationsRequiredForMatrixStep).ToList();

int maxIndexRat = selectedRows.Select(row => row.LastIndexOfRational).Max();

int maxIndexAlg = selectedRows.Select(row => row.LastIndexOfAlgebraic).Max();

int maxIndexQua = selectedRows.Select(row => row.LastIndexOfQuadratic).Max();

foreach (GaussianRow row in selectedRows)

{

row.ResizeRationalPart(maxIndexRat);

row.ResizeAlgebraicPart(maxIndexAlg);

row.ResizeQuadraticPart(maxIndexQua);

}

GaussianRow exampleRow = selectedRows.First();

int newLength = exampleRow.GetBoolArray().Length;

newLength++;

selectedRows = selectedRows.Take(newLength).ToList();

foreach (GaussianRow row in selectedRows)

{

relationMatrixTuple.Add(new Tuple<Relation, bool[]>(row.SourceRelation, row.GetBoolArray()));

}

}

public void TransposeAppend()

{

List<bool[]> result = new List<bool[]>();

ColumnIndexRelationDictionary = new Dictionary<int, Relation>();

int index = 0;

int numRows = relationMatrixTuple[0].Item2.Length;

while (index < numRows)

{

ColumnIndexRelationDictionary.Add(index, relationMatrixTuple[index].Item1);

List<bool> newRow = relationMatrixTuple.Select(bv => bv.Item2[index]).ToList();

newRow.Add(false);

result.Add(newRow.ToArray());

index++;

}

M = result;

freeCols = new bool[M.Count];

}

public void Elimination()

{

if (eliminationStep)

{

return;

}

int numRows = RowCount;

int numCols = ColumnCount;

freeCols = Enumerable.Repeat(false, numCols).ToArray();

int h = 0;

for (int i = 0; i < numRows && h < numCols; i++)

{

bool next = false;

if (M[i][h] == false)

{

int t = i + 1;

while (t < numRows && M[t][h] == false)

{

t++;

}

if (t < numRows)

{

//swap rows M[i] and M[t]

bool[] temp = M[i];

M[i] = M[t];

M[t] = temp;

temp = null;

}

else

{

freeCols[h] = true;

i--;

next = true;

}

}

if (next == false)

{

for (int j = i + 1; j < numRows; j++)

{

if (M[j][h] == true)

{

// Add rows

// M [j] ← M [j] + M [i]

M[j] = Add(M[j], M[i]);

}

}

for (int j = 0; j < i; j++)

{

if (M[j][h] == true)

{

// Add rows

// M [j] ← M [j] + M [i]

M[j] = Add(M[j], M[i]);

}

}

}

h++;

}

eliminationStep = true;

}

public List<Relation> GetSolutionSet(int numberOfSolutions)

{

bool[] solutionSet = GetSolutionFlags(numberOfSolutions);

int index = 0;

int max = ColumnIndexRelationDictionary.Count;

List<Relation> result = new List<Relation>();

while (index < max)

{

if (solutionSet[index] == true)

{

result.Add(ColumnIndexRelationDictionary[index]);

}

index++;

}

return result;

}

private bool[] GetSolutionFlags(int numSolutions)

{

if (!eliminationStep)

{

throw new Exception("Must call Elimination() method first!");

}

if (numSolutions < 1)

{

throw new ArgumentException($"{nameof(numSolutions)} must be greater than 1.");

}

int numRows = RowCount;

int numCols = ColumnCount;

if (numSolutions >= numCols)

{

throw new ArgumentException($"{nameof(numSolutions)} must be less than the column count.");

}

bool[] result = new bool[numCols];

int j = -1;

int i = numSolutions;

while (i > 0)

{

j++;

while (freeCols[j] == false)

{

j++;

}

i--;

}

result[j] = true;

for (i = 0; i < numRows - 1; i++)

{

if (M[i][j] == true)

{

int h = i;

while (h < j)

{

if (M[i][h] == true)

{

result[h] = true;

break;

}

h++;

}

}

}

return result;

}

public static bool[] Add(bool[] left, bool[] right)

{

if (left.Length != right.Length) throw new ArgumentException($"Both vectors must have the same length.");

int length = left.Length;

bool[] result = new bool[length];

int index = 0;

while (index < length)

{

result[index] = left[index] ^ right[index];

index++;

}

return result;

}

}

public class GaussianRow

{

public bool Sign { get; set; }

public List<bool> RationalPart { get; set; }

public List<bool> AlgebraicPart { get; set; }

public List<bool> QuadraticPart { get; set; }

public int LastIndexOfRational { get { return RationalPart.LastIndexOf(true); } }

public int LastIndexOfAlgebraic { get { return AlgebraicPart.LastIndexOf(true); } }

public int LastIndexOfQuadratic { get { return QuadraticPart.LastIndexOf(true); } }

public Relation SourceRelation { get; private set; }

public GaussianRow(GNFS gnfs, Relation relation)

{

SourceRelation = relation;

if (relation.RationalNorm.Sign == -1)

{

Sign = true;

}

else

{

Sign = false;

}

FactorPairCollection qfb = gnfs.QuadraticFactorPairCollection;

BigInteger rationalMaxValue = gnfs.PrimeFactorBase.RationalFactorBaseMax;

BigInteger algebraicMaxValue = gnfs.PrimeFactorBase.AlgebraicFactorBaseMax;

RationalPart = GetVector(relation.RationalFactorization, rationalMaxValue).ToList();

AlgebraicPart = GetVector(relation.AlgebraicFactorization, algebraicMaxValue).ToList();

QuadraticPart = qfb.Select(qf => QuadraticResidue.GetQuadraticCharacter(relation, qf)).ToList();

}

protected static bool[] GetVector(CountDictionary primeFactorizationDict, BigInteger maxValue)

{

int primeIndex = PrimeFactory.GetIndexFromValue(maxValue);

bool[] result = new bool[primeIndex];

if (primeFactorizationDict.Any())

{

foreach (KeyValuePair<BigInteger, BigInteger> kvp in primeFactorizationDict)

{

if (kvp.Key > maxValue)

{

continue;

}

if (kvp.Key == -1)

{

continue;

}

if (kvp.Value % 2 == 0)

{

continue;

}

int index = PrimeFactory.GetIndexFromValue(kvp.Key);

result[index] = true;

}

}

return result;

}

public bool[] GetBoolArray()

{

List<bool> result = new List<bool>() { Sign };

result.AddRange(RationalPart);

result.AddRange(AlgebraicPart);

result.AddRange(QuadraticPart);

//result.Add(false);

return result.ToArray();

}

public void ResizeRationalPart(int size)

{

RationalPart = RationalPart.Take(size + 1).ToList();

}

public void ResizeAlgebraicPart(int size)

{

AlgebraicPart = AlgebraicPart.Take(size + 1).ToList();

}

public void ResizeQuadraticPart(int size)

{

QuadraticPart = QuadraticPart.Take(size + 1).ToList();

}

}

public class QuadraticResidue

{

public static bool GetQuadraticCharacter(Relation rel, FactorPair quadraticFactor)

{

BigInteger ab = rel.A + rel.B;

BigInteger abp = BigInteger.Abs(BigInteger.Multiply(ab, quadraticFactor.P));

int legendreSymbol = Legendre.Symbol(abp, quadraticFactor.R);

return (legendreSymbol != 1);

}

}

public static class Legendre

{

/// <summary>

/// Legendre Symbol returns 1 for a (nonzero) quadratic residue mod p, -1 for a non-quadratic residue (non-residue), or 0 on zero.

/// </summary>

public static int Symbol(BigInteger a, BigInteger p)

{

if (p < 2) { throw new ArgumentOutOfRangeException(nameof(p), $"Parameter '{nameof(p)}' must not be < 2, but you have supplied: {p}"); }

if (a == 0) { return 0; }

if (a == 1) { return 1; }

int result;

if (a.Mod(2) == 0)

{

result = Symbol(a >> 2, p); // >> right shift == /2

if (((p \* p - 1) & 8) != 0) // instead of dividing by 8, shift the mask bit

{

result = -result;

}

}

else

{

result = Symbol(p.Mod(a), a);

if (((a - 1) \* (p - 1) & 4) != 0) // instead of dividing by 4, shift the mask bit

{

result = -result;

}

}

return result;

}

/// <summary>

/// Find r such that (r | m) = goal, where (r | m) is the Legendre symbol, and m = modulus

/// </summary>

public static BigInteger SymbolSearch(BigInteger start, BigInteger modulus, BigInteger goal)

{

if (goal != -1 && goal != 0 && goal != 1)

{

throw new Exception($"Parameter '{nameof(goal)}' may only be -1, 0 or 1. It was {goal}.");

}

BigInteger counter = start;

BigInteger max = counter + modulus + 1;

do

{

if (Symbol(counter, modulus) == goal)

{

return counter;

}

counter++;

}

while (counter <= max);

//return counter;

throw new Exception("Legendre symbol matching criteria not found.");

}

}

public static class BigIntegerCollectionExtensionMethods

{

public static BigInteger Product(this IEnumerable<BigInteger> input)

{

BigInteger result = 1;

foreach (BigInteger bi in input)

{

result = BigInteger.Multiply(result, bi);

}

return result;

}

}

public partial class SquareFinder

{

public BigInteger RationalProduct { get; set; }

public BigInteger RationalSquare { get; set; }

public BigInteger RationalSquareRootResidue { get; set; }

public bool IsRationalSquare { get; set; }

public bool IsRationalIrreducible { get; set; }

public BigInteger AlgebraicProduct { get; set; }

public BigInteger AlgebraicSquare { get; set; }

public BigInteger AlgebraicProductModF { get; set; }

public BigInteger AlgebraicSquareResidue { get; set; }

public BigInteger AlgebraicSquareRootResidue { get; set; }

public List<BigInteger> AlgebraicPrimes { get; set; }

public List<BigInteger> AlgebraicResults { get; set; }

public bool IsAlgebraicSquare { get; set; }

public bool IsAlgebraicIrreducible { get; set; }

public BigInteger N { get; set; }

public Polynomial S { get; set; }

public Polynomial TotalS { get; set; }

public List<Tuple<BigInteger, BigInteger>> RootsOfS { get; set; }

public Polynomial PolynomialRing { get; set; }

public List<Polynomial> PolynomialRingElements { get; set; }

public BigInteger PolynomialBase { get; set; }

public Polynomial MonicPolynomial { get; set; }

public Polynomial PolynomialDerivative { get; set; }

public Polynomial MonicPolynomialDerivative { get; set; }

public Polynomial PolynomialDerivativeSquared { get; set; }

public Polynomial PolynomialDerivativeSquaredInField { get; set; }

public BigInteger PolynomialDerivativeValue { get; set; }

public BigInteger PolynomialDerivativeValueSquared { get; set; }

public Polynomial MonicPolynomialDerivativeSquared { get; set; }

public Polynomial MonicPolynomialDerivativeSquaredInField { get; set; }

public BigInteger MonicPolynomialDerivativeValue { get; set; }

public BigInteger MonicPolynomialDerivativeValueSquared { get; set; }

private GNFS gnfs { get; set; }

private List<BigInteger> rationalNorms { get; set; }

private List<BigInteger> algebraicNormCollection { get; set; }

private List<Relation> relationsSet { get; set; }

public SquareFinder(GNFS sieve)

{

RationalSquareRootResidue = -1;

RootsOfS = new List<Tuple<BigInteger, BigInteger>>();

gnfs = sieve;

N = gnfs.N;

PolynomialBase = gnfs.PolynomialBase;

PolynomialDerivative = Polynomial.GetDerivativePolynomial(gnfs.CurrentPolynomial);

PolynomialDerivativeSquared = Polynomial.Square(PolynomialDerivative);

PolynomialDerivativeSquaredInField = Polynomial.Field.Modulus(PolynomialDerivativeSquared, gnfs.CurrentPolynomial);

PolynomialDerivativeValue = PolynomialDerivative.Evaluate(gnfs.PolynomialBase);

PolynomialDerivativeValueSquared = BigInteger.Pow(PolynomialDerivativeValue, 2);

MonicPolynomial = Polynomial.MakeMonic(gnfs.CurrentPolynomial, PolynomialBase);

MonicPolynomialDerivative = Polynomial.GetDerivativePolynomial(MonicPolynomial);

MonicPolynomialDerivativeSquared = Polynomial.Square(MonicPolynomialDerivative);

MonicPolynomialDerivativeSquaredInField = Polynomial.Field.Modulus(MonicPolynomialDerivativeSquared, MonicPolynomial);

MonicPolynomialDerivativeValue = MonicPolynomialDerivative.Evaluate(gnfs.PolynomialBase);

MonicPolynomialDerivativeValueSquared = MonicPolynomialDerivativeSquared.Evaluate(gnfs.PolynomialBase);

}

public static bool Solve(GNFS gnfs)

{

List<int> triedFreeRelationIndices = new List<int>();

BigInteger polyBase = gnfs.PolynomialBase;

List<List<Relation>> freeRelations = gnfs.CurrentRelationsProgress.FreeRelations;

SquareFinder squareRootFinder = new SquareFinder(gnfs);

int freeRelationIndex = 0;

bool solutionFound = false;

// Below randomly selects a solution set to try and find a square root of the polynomial in.

while (!solutionFound)

{

// Each time this step is stopped and restarted, it will try a different solution set.

// Previous used sets are tracked with the List<int> triedFreeRelationIndices

if (triedFreeRelationIndices.Count == freeRelations.Count) // If we have exhausted our solution sets, alert the user. Number wont factor for some reason.

{

break;

}

do

{

// Below randomly selects a solution set to try and find a square root of the polynomial in.

freeRelationIndex = StaticRandom.Next(0, freeRelations.Count);

}

while (triedFreeRelationIndices.Contains(freeRelationIndex));

triedFreeRelationIndices.Add(freeRelationIndex); // Add current selection to our list

List<Relation> selectedRelationSet = freeRelations[freeRelationIndex]; // Get the solution set

squareRootFinder.CalculateRationalSide(selectedRelationSet);

Tuple<BigInteger, BigInteger> foundFactors = squareRootFinder.CalculateAlgebraicSide();

BigInteger P = foundFactors.Item1;

BigInteger Q = foundFactors.Item2;

bool nonTrivialFactorsFound = (P != 1 || Q != 1);

if (nonTrivialFactorsFound)

{

solutionFound = gnfs.SetFactorizationSolution(P, Q);

break;

}

else

{

}

}

return solutionFound;

}

public void CalculateRationalSide(List<Relation> relations)

{

relationsSet = relations;

rationalNorms = relationsSet.Select(rel => rel.RationalNorm).ToList();

CountDictionary rationalSquareFactorization = new CountDictionary();

foreach (var rel in relationsSet)

{

rationalSquareFactorization.Combine(rel.RationalFactorization);

}

string rationalSquareFactorizationString = rationalSquareFactorization.FormatStringAsFactorization();

RationalProduct = rationalNorms.Product();

BigInteger RationalProductSquareRoot = RationalProduct.SquareRoot();

var product = PolynomialDerivativeValue \* RationalProductSquareRoot;

RationalSquareRootResidue = product.Mod(N);

IsRationalSquare = RationalProduct.IsSquare();

if (!IsRationalSquare) // This is an error in implementation. This should never happen, and so must be a bug

{

throw new Exception($"{nameof(IsRationalSquare)} evaluated to false. This is a sign that there is a bug in the implementation, as this should never be the case if the algorithm has been correctly implemented.");

}

}

public Tuple<BigInteger, BigInteger> CalculateAlgebraicSide()

{

RootsOfS.AddRange(relationsSet.Select(rel => new Tuple<BigInteger, BigInteger>(rel.A, rel.B)));

PolynomialRingElements = new List<Polynomial>();

foreach (Relation rel in relationsSet)

{

// poly(x) = A + (B \* x)

Polynomial newPoly =

new Polynomial(

new Term[]

{

new Term( rel.B, 1),

new Term( rel.A, 0)

}

);

PolynomialRingElements.Add(newPoly);

}

PolynomialRing = Polynomial.Product(PolynomialRingElements);

Polynomial PolynomialRingInField = Polynomial.Field.Modulus(PolynomialRing, MonicPolynomial);

// Multiply the product of the polynomial elements by f'(x)^2

// This will guarantee that the square root of product of polynomials

// is an element of the number field defined by the algebraic polynomial.

TotalS = Polynomial.Multiply(PolynomialRing, MonicPolynomialDerivativeSquared);

S = Polynomial.Field.Modulus(TotalS, MonicPolynomial);

bool solutionFound = false;

int degree = MonicPolynomial.Degree;

Polynomial f = MonicPolynomial;// gnfs.CurrentPolynomial;

BigInteger lastP = gnfs.QuadraticFactorPairCollection.Last().P; //quadraticPrimes.First(); //BigInteger.Max(fromRoot, fromQuadraticFactorPairs); //N / N.ToString().Length; //((N \* 3) + 1).NthRoot(3); //gnfs.QFB.Select(fp => fp.P).Max();

lastP = PrimeFactory.GetNextPrime(lastP + 1);

List<BigInteger> primes = new List<BigInteger>();

List<BigInteger> values = new List<BigInteger>();

int attempts = 7;

while (!solutionFound && attempts > 0)

{

if (primes.Count > 0 && values.Count > 0)

{

primes.Clear();

values.Clear();

}

do

{

lastP = PrimeFactory.GetNextPrime(lastP + 1);

Polynomial g = Polynomial.Parse($"X^{lastP} - X");

Polynomial h = FiniteFieldArithmetic.ModMod(g, f, lastP);

Polynomial gcd = Polynomial.Field.GCD(h, f, lastP);

bool isIrreducible = gcd.CompareTo(Polynomial.One) == 0;

if (!isIrreducible)

{

continue;

}

primes.Add(lastP);

}

while (primes.Count < degree);

if (primes.Count > degree)

{

primes.Remove(primes.First());

values.Remove(values.First());

}

BigInteger primeProduct = primes.Product();

if (primeProduct < N)

{

continue;

}

bool takeInverse = false;

foreach (BigInteger p in primes)

{

Polynomial choosenPoly = FiniteFieldArithmetic.SquareRoot(S, f, p, degree, gnfs.PolynomialBase);

BigInteger choosenX;

//if (takeInverse)

//{

// Polynomial inverse = ModularInverse(choosenPoly, p);

// BigInteger inverseEval = inverse.Evaluate(gnfs.PolynomialBase);

// BigInteger inverseX = inverseEval.Mod(p);

//

// choosenPoly = inverse;

// choosenX = inverseX;

//}

//else

//{

BigInteger eval = choosenPoly.Evaluate(gnfs.PolynomialBase);

BigInteger x = eval.Mod(p);

choosenX = x;

//}

values.Add(choosenX);

takeInverse = !takeInverse;

}

BigInteger commonModulus = Polynomial.Algorithms.ChineseRemainderTheorem(primes.ToArray(), values.ToArray()); //FiniteFieldArithmetic.ChineseRemainder(primes, values);

AlgebraicSquareRootResidue = commonModulus.Mod(N);

int index = -1;

while ((++index) < primes.Count)

{

var tp = primes[index];

var tv = values[index];

}

BigInteger algebraicSquareRoot = 1;

BigInteger min;

BigInteger max;

BigInteger A;

BigInteger B;

BigInteger U;

BigInteger V;

BigInteger P = 0;

BigInteger Q;

min = BigInteger.Min(RationalSquareRootResidue, AlgebraicSquareRootResidue);

max = BigInteger.Max(RationalSquareRootResidue, AlgebraicSquareRootResidue);

A = max + min;

B = max - min;

U = GCD.FindGCD(N, A);

V = GCD.FindGCD(N, B);

if (U > 1 && U != N)

{

P = U;

solutionFound = true;

}

else if (V > 1 && V != N)

{

P = V;

solutionFound = true;

}

if (solutionFound)

{

BigInteger rem;

BigInteger other = BigInteger.DivRem(N, P, out rem);

if (rem != 0)

{

solutionFound = false;

}

else

{

Q = other;

AlgebraicResults = values;

//AlgebraicSquareRootResidue = AlgebraicSquareRootResidue;

AlgebraicPrimes = primes;

return new Tuple<BigInteger, BigInteger>(P, Q);

}

}

if (!solutionFound)

{

attempts--;

}

}

return new Tuple<BigInteger, BigInteger>(1, 1);

}

private static Tuple<BigInteger, BigInteger> AlgebraicSquareRoot(Polynomial f, BigInteger m, int degree, Polynomial dd, BigInteger p)

{

Polynomial startPolynomial = Polynomial.Field.Modulus(dd, p);

Polynomial startInversePolynomial = ModularInverse(startPolynomial, p);

Polynomial startSquared1 = FiniteFieldArithmetic.ModMod(Polynomial.Square(startPolynomial), f, p);

Polynomial startSquared2 = FiniteFieldArithmetic.ModMod(Polynomial.Square(startInversePolynomial), f, p);

Polynomial resultPoly1 = FiniteFieldArithmetic.SquareRoot(startPolynomial, f, p, degree, m);

Polynomial resultPoly2 = ModularInverse(resultPoly1, p);

Polynomial resultSquared1 = FiniteFieldArithmetic.ModMod(Polynomial.Square(resultPoly1), f, p);

Polynomial resultSquared2 = FiniteFieldArithmetic.ModMod(Polynomial.Square(resultPoly2), f, p);

bool bothResultsAgree = (resultSquared1.CompareTo(resultSquared2) == 0);

BigInteger result1 = resultPoly1.Evaluate(m).Mod(p);

BigInteger result2 = resultPoly2.Evaluate(m).Mod(p);

BigInteger inversePrime = p - result1;

bool testEvaluationsAreModularInverses = inversePrime == result2;

if (bothResultsAgree && testEvaluationsAreModularInverses)

{

return new Tuple<BigInteger, BigInteger>(BigInteger.Min(result1, result2), BigInteger.Max(result1, result2));

}

return new Tuple<BigInteger, BigInteger>(BigInteger.Zero, BigInteger.Zero);

}

private static Polynomial ModularInverse(Polynomial poly, BigInteger mod)

{

return new Polynomial(Term.GetTerms(poly.Terms.Select(trm => (mod - trm.CoEfficient).Mod(mod)).ToArray()));

}

}

public static class GCD

{

public static BigInteger FindGCD(BigInteger left, BigInteger right)

{

return BigInteger.GreatestCommonDivisor(left, right);

}

}

public class Solution

{

[DataMember]

public BigInteger P { get; private set; }

[DataMember]

public BigInteger Q { get; private set; }

public Solution(BigInteger p, BigInteger q)

{

P = p;

Q = q;

}

}

public static class FiniteFieldArithmetic

{

/// <summary>

/// Tonelli-Shanks algorithm for finding polynomial modular square roots

/// </summary>

/// <returns></returns>

public static Polynomial SquareRoot(Polynomial startPolynomial, Polynomial f, BigInteger p, int degree, BigInteger m)

{

BigInteger q = BigInteger.Pow(p, degree);

BigInteger s = q - 1;

int r = 0;

while (s.Mod(2) == 0)

{

s /= 2;

r++;

}

BigInteger halfS = ((s + 1) / 2);

if (r == 1 && q.Mod(4) == 3)

{

halfS = ((q + 1) / 4);

}

BigInteger quadraticNonResidue = Legendre.SymbolSearch(m + 1, q, -1);

BigInteger theta = quadraticNonResidue;

BigInteger minusOne = BigInteger.ModPow(theta, ((q - 1) / 2), p);

Polynomial omegaPoly = Polynomial.Field.ExponentiateMod(startPolynomial, halfS, f, p);

BigInteger lambda = minusOne;

BigInteger zeta = 0;

int i = 0;

do

{

i++;

zeta = BigInteger.ModPow(theta, (i \* s), p);

lambda = (lambda \* BigInteger.Pow(zeta, (int)Math.Pow(2, (r - i)))).Mod(p);

omegaPoly = Polynomial.Field.Multiply(omegaPoly, BigInteger.Pow(zeta, (int)Math.Pow(2, ((r - i) - 1))), p);

}

while (!((lambda == 1) || (i > (r))));

return omegaPoly;

}

/// <summary>

/// Finds X such that a\*X = 1 (mod p)

/// </summary>

/// <param name="a">a.</param>

/// <param name="p">The modulus</param>

/// <returns></returns>

public static BigInteger ModularMultiplicativeInverse(BigInteger a, BigInteger p)

{

if (p == 1)

{

return 0;

}

BigInteger divisor;

BigInteger dividend = a;

BigInteger diff = 0;

BigInteger result = 1;

BigInteger quotient = 0;

BigInteger lastDivisor = 0;

BigInteger remainder = p;

while (dividend > 1)

{

divisor = remainder;

quotient = BigInteger.DivRem(dividend, divisor, out remainder); // Divide

dividend = divisor;

lastDivisor = diff; // The thing to divide will be the last divisor

// Update diff and result

diff = result - quotient \* diff;

result = lastDivisor;

}

if (result < 0)

{

result += p; // Make result positive

}

return result;

}

/// <summary>

/// Finds N such that primes[i] ≡ values[i] (mod N) for all values[i] with 0 &lt; i &lt; a.Length

/// </summary>

public static BigInteger ChineseRemainder(List<BigInteger> primes, List<BigInteger> values)

{

BigInteger primeProduct = primes.Product();

int indx = 0;

BigInteger Z = 0;

foreach (BigInteger pi in primes)

{

BigInteger Pj = primeProduct / pi;

BigInteger Aj = ModularMultiplicativeInverse(Pj, pi);

BigInteger AXPj = values[indx] \* Aj \* Pj;

Z += AXPj;

indx++;

}

BigInteger r = Z / primeProduct;

BigInteger rP = r \* primeProduct;

BigInteger finalResult\_sqrt = (Z - rP);

return finalResult\_sqrt;

}

/// <summary>

/// Reduce a polynomial by a modulus polynomial and modulus integer.

/// </summary>

public static Polynomial ModMod(Polynomial toReduce, Polynomial modPoly, BigInteger primeModulus)

{

int compare = modPoly.CompareTo(toReduce);

if (compare > 0)

{

return toReduce;

}

if (compare == 0)

{

return Polynomial.Zero;

}

return Remainder(toReduce, modPoly, primeModulus);

}

public static Polynomial Remainder(Polynomial left, Polynomial right, BigInteger mod)

{

if (left == null)

{

throw new ArgumentNullException("left");

}

if (right == null)

{

throw new ArgumentNullException("right");

}

if (right.Degree > left.Degree || right.CompareTo(left) == 1)

{

return Polynomial.Zero.Clone();

}

int rightDegree = right.Degree;

int quotientDegree = left.Degree - rightDegree + 1;

BigInteger leadingCoefficent = right[rightDegree].Mod(mod);

if (leadingCoefficent != 1) { throw new ArgumentNullException("right", "This method was expecting only monomials (leading coefficient is 1) for the right-hand-side polynomial."); }

Polynomial rem = left.Clone();

BigInteger quot = 0;

for (int i = quotientDegree - 1; i >= 0; i--)

{

quot = BigInteger.Remainder(rem[rightDegree + i], mod);//.Mod(mod);

rem[rightDegree + i] = 0;

for (int j = rightDegree + i - 1; j >= i; j--)

{

rem[j] = BigInteger.Subtract(

rem[j],

BigInteger.Multiply(quot, right[j - i]).Mod(mod)

).Mod(mod);

}

}

return new Polynomial(rem.Terms);

}

}

}